

Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra aplikované matematiky

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika

L-MOMENTOVÁ METODA

METHOD OF L-MOMENTS

Bakalářská práce: 12-FP-KAP-001

Autor:

Tereza ŠIMKOVÁ

Podpis:

.....

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jan Pícek, CSc.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
72	0	8	9	9	0

V Liberci dne: 22. dubna 2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Tereza Šimková**
Osobní číslo: **P09000146**
Studijní program: **B1101 Matematika**
Studijní obor: **Matematika**
Název tématu: **L-momentová metoda**
Zadávající katedra: **Katedra aplikované matematiky**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

Využít L-momenty pro odvození odhadů pravděpodobnostních rozdělení a srovnat tento přístup s běžně používanými metodami.

Konkrétní úkoly řešené v rámci práce jsou:

1. Seznámit se s myšlenkou L-momentů, jejich vlastnostmi a některými zobecněními
2. Pro vybraná rozdělení odvodit odhady parametrů těchto rozdělení na základě L-momentové metody
3. Získané výsledky porovnat na základě simulační studie s odhady získané metodou maximální věrohodnosti a momentovou metodou
4. Aplikovat získané poznatky na reálná klimatická data

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

ANDĚL, Jiří. Základy matematické statistiky. Praha : Matfyzpress, 2005. 356 s.

ELAMIR, E. A. H.; SEHEULT, A. H. Trimmed L-moments. Computational Statistics & Data Analysis. 2003, 43 (3), s. 299-314.

HOSKING, J. R. M. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. Journal of the Royal Statistical Society, Series B. 1990, 52, s. 105-124.

HOSKING, J. R. M.; WALLIS, J. R. Regional frequency analysis: an approach based on L-moments. Cambridge : Cambridge University Press, 1997. 242 s.

KYSELÝ, J.; PICEK, J. Regional growth curves and improved design value estimates of extreme precipitation events in Czech Republic. Climate Research. 2007, 33, s. 243-255.

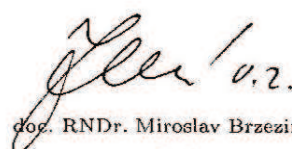
Vedoucí bakalářské práce:

doc. RNDr. Jan Pícek, CSc.

Katedra aplikované matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **24. května 2011**

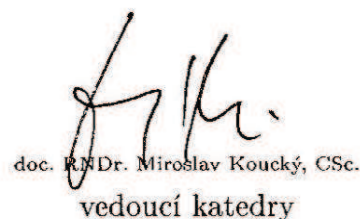
Termín odevzdání bakalářské práce: **27. dubna 2012**



doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.

děkan

L.S.



doc. RNDr. Miroslav Koucký, CSc.

vedoucí katedry

V Liberci dne 30. března 2011

Čestné prohlášení

Název práce: L-momentová metoda

Jméno a příjmení autora: Tereza Šimková

Osobní číslo: P09000146

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě, a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 22. dubna 2012

.....

Tereza Šimková

Poděkování

Ráda bych poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce panu doc. RNDr. Janu Pickovi, CSc. za odborné vedení, cenné rady a čas, který mi při konzultacích věnoval.

Anotace

L-momenty jsou analogie ke konvenčním momentům a jsou založeny na lineární kombinaci uspořádaných dat. Stejně jako v případě konvenčních momentů uvažujeme teoretické L-momenty a výběrové L-momenty. Pojem zavedl v roce 1990 J. R. M. Hosking a ukázal řadu jejich vlastností.

Jednou z důležitých úloh matematické statistiky je odhad parametrů pravděpodobnostních rozdělení. Nejčastěji se pro tuto úlohu používá metoda maximální věrohodnosti nebo momentová metoda. L-momenty nabízí vzhledem k své analogii ke konvenčním momentům vhodnou alternativu k těmto metodám.

Klíčová slova: L-momenty, konvenční momenty, pořádková statistika, odhad parametrů, L-momentová metoda

Summary

L-moments are analogy to the conventional moments and they are based on the linear combinations of order statistics. As it is in the theory of the conventional moments we consider theoretic L-moments and sample L-moments. J. R. M. Hosking introduced the idea of L-moments in 1990 and showed the wide range of their properties.

Estimation of parameters is one of the most important problems of mathematical statistics. The method of maximum likelihood or the method of moments is the most used for estimation of parameters. L-moments due to the analogy to the conventional moments are the convenient alternative to these methods.

Key words: L-moments, conventional moments, order statistics, estimation of parameters, L-moment method

Obsah

Seznam obrázků	9
Seznam tabulek	9
Seznam zkratk a symbolů	10
Úvod	12
1 Konvenční momenty	13
1.1 Teoretické konvenční momenty	13
1.2 Výběrové konvenční momenty	14
2 L-momenty	16
2.1 Teoretické L-momenty	16
2.1.1 Definice a základní vlastnosti	16
2.1.2 Teoretické L-momentové poměry	19
2.1.3 L-poloha, L-rozptyl, L-šikmost, L-špičatost	19
2.2 Výběrové L-momenty	22
2.2.1 Definice a základní vlastnosti	22
2.2.2 Výběrové L-momentové poměry	23
3 L-momenty vybraných pravděpodobnostních rozdělení	25
3.1 Rovnoměrné rozdělení $R(\alpha, \beta)$	25
3.2 Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\xi, \alpha)$	28
3.3 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$	32
3.4 Paretovo rozdělení $\text{Par}(\alpha, \beta)$	36
3.5 Logistické rozdělení $\text{Logi}(\xi, \alpha)$	39
3.6 Zobecněné Paretovo rozdělení $\text{GPD}(\xi, \alpha, k)$	45
4 Odhad parametrů pravděpodobnostních rozdělení	51
4.1 Metody odhadu parametrů	51
4.1.1 Metoda maximální věrohodnosti	52
4.1.2 Momentová metoda	52
4.1.3 L-momentová metoda	53

4.2	Odhad parametrů vybraných pravděpodobnostních rozdělení L-momentovou metodou	53
4.2.1	Rovnoměrné rozdělení $R(\alpha, \beta)$	53
4.2.2	Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\xi, \alpha)$	54
4.2.3	Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$	54
4.2.4	Paretovo rozdělení $\text{Par}(\alpha, \beta)$	55
4.2.5	Logistické rozdělení $\text{Logi}(\xi, \alpha)$	55
4.2.6	Zobecněné Paretovo rozdělení $\text{GPD}(\xi, \alpha, k)$	55
5	Malá simulační studie odhadu parametrů v programu R	57
5.1	Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$	57
5.2	Logistické rozdělení $\text{Logi}(\xi, \alpha)$	61
5.3	Zobecněné Paretovo rozdělení $\text{GPD}(\xi, \alpha, k)$	64
6	Pravděpodobnost extrémních srážkových událostí	68
	Závěr	71
	Reference	72

Seznam obrázků

1	Interpretace prvního L-momentu λ_1	20
2	Interpretace druhého L-momentu λ_2	20
3	Interpretace třetího L-momentu λ_3	21
4	Hustota normálního rozdělení pro různé kombinace parametrů	57
5	Hustota logistického rozdělení pro různé kombinace parametrů	61
6	Hustota zobecněného Paretova rozdělení pro různé kombinace parametrů	65
7	Maximální roční úhrn srážek v mm za 1, 2, 3, 5 a 7 dnů v Liberci v letech 1971–2007	69
8	L-momentový poměrový diagram pro maximální roční 1denní až 7denní úhrn srážek	70

Seznam tabulek

1	Analogie teoretických L-momentů a konvenčních momentů	21
2	Analogie výběrových L-momentů a konvenčních momentů	24
3	L-momenty a L-momentové poměry vybraných pravděpodobnostních rozdělení	50
4	Odhady parametrů vybraných pravděpodobnostních rozdělení	56
5	Výsledky simulace normálního rozdělení	60
6	Výsledky simulace logistického rozdělení	64
7	Výsledky simulace zobecněného Paretova rozdělení	67
8	Maximální roční úhrn srážek v mm za 1, 2, 3, 5 a 7 dnů v Liberci v letech 1971–2007	68
9	Odhady parametrů a některé kvantily pro zobecněné Paretovo rozdě- lení odpovídající datům z Tabulky 8	70

Seznam zkratek a symbolů

a_3	výběrový koeficient šikmosti
a_4	výběrový koeficient špičatosti
$E X$	střední hodnota náhodné veličiny
$\text{Exp}(\xi, \alpha)$	exponenciální rozdělení s parametry ξ, α
e^x	exponenciální funkce
$f(x)$	hustota rozdělení náhodné veličiny
$F(x)$	distribuční funkce náhodné veličiny
$f(x_1, x_1, \dots, x_n)$	sdružená hustota
GEV	rozdělení extrémních hodnot
GLO	zobecněné logistické rozdělení
GPD(ξ, α, k)	zobecněné Paretovo rozdělení s parametry ξ, α, k
ℓ	věrohodnostní funkce
L	logaritmická věrohodnostní funkce
LH	l'Hospitalovo pravidlo
LMO	L-momentová metoda
$\ln x$	přirozený logaritmus
$\text{Logi}(\xi, \alpha)$	logistické rozdělení s parametry ξ, α
l_r	r -tý výběrový L-moment
MLE	metoda maximální věrohodnosti
MOM	momentová metoda
MSE	střední kvadratická chyba odhadu
m'_r	r -tý výběrový moment
$N(\mu, \sigma^2)$	normální rozdělení s parametry μ, σ^2
$\text{Par}(\alpha, \beta)$	Paretovo rozdělení s parametry α, β
p.p.	metoda per partes
$P_r^*(F)$	r -tý posunutý Legendrův polynom
\mathbb{R}	množina reálných čísel
$R(\alpha, \beta)$	rovnoměrné rozdělení s parametry α, β
S^2	výběrový rozptyl
t_r	r -tý výběrový L-momentový poměr
$\text{var } X, \sigma^2$	rozptyl náhodné veličiny

$\sqrt{\text{var } X}, \sigma$	směrodatná odchylka náhodné veličiny
X	náhodná veličina
\bar{X}	výběrový průměr
$x_{i:n}$	i -tá pořádková statistika náhodných pozorování
$X_{i:n}$	i -tá pořádková statistika náhodného výběru
$x(F)$	kvantilová funkce náhodné veličiny
α_r	r -tý momentový poměr náhodné veličiny
α_3	koeficient šikmosti náhodné veličiny
α_4	koeficient špičatosti náhodné veličiny
λ_r	r -tý L-moment náhodné veličiny
μ	populační průměr
μ_r	r -tý centrální moment náhodné veličiny
μ'_r	r -tý obecný moment náhodné veličiny
π	Ludolfovo číslo
τ_r	r -tý L-momentový poměr náhodné veličiny
$\Phi(x)$	distribuční funkce normálního rozdělení
$\varphi(x)$	hustota normálního rozdělení
Π	součinový znak
Σ	sumační znak
$\frac{\partial f}{\partial x}$	parciální derivace funkce f podle proměnné x

Úvod

Odhad parametrů pravděpodobnostních rozdělení je důležitou součástí matematické statistiky. K tomu se obvykle používá metoda maximální věrohodnosti nebo momentová metoda. Odhad parametrů pravděpodobnostních rozdělení lze vzhledem k analogii L-momentů ke konvenčním momentům realizovat pomocí L-momentů. Cílem práce je využít L-momenty pro odvození odhadů parametrů pravděpodobnostních rozdělení a srovnat tento přístup s běžně používanými metodami.

Práce je rozdělena do šesti částí. První kapitola připomíná základní charakteristiky, kterými popisujeme pravděpodobnostní rozdělení. Je to potřebné proto, že v další kapitole budeme mezi konvenčními momenty a L-momenty hledat analogii. V druhé části zavedeme L-momenty (jak teoretické, tak výběrové), seznámíme se s jejich některými vlastnostmi a uvedeme zmínku o tzv. TL-momentech, které jsou zobecněním L-momentů. Objasníme v ní také již zmíněnou analogii s konvenčními momenty. V třetí kapitole aplikujeme teorii L-momentů na vybraná spojitá rozdělení a vypočteme jejich L-momenty a L-momentové poměry. S těmito výsledky budeme i nadále pracovat v následující kapitole. Čtvrtá část se zabývá odhadem parametrů pravděpodobnostních rozdělení. Stručně jsou zde vyloženy základní principy metody maximální věrohodnosti a momentové metody a je zde zavedena L-momentová metoda. Obsah této kapitoly tvoří i odhad parametrů vybraných spojitých rozdělení (zde uplatníme dosažené výpočty ze třetí kapitoly). Předposlední, pátá kapitola pojednává o volbě metody odhadu parametrů pro některá pravděpodobnostní rozdělení. Na základě simulační studie jsou porovnány výsledky získané L-momentovou metodou, momentovou metodou a metodou maximální věrohodnosti. Závěrečná část je věnována aplikaci získaných poznatků na reálná klimatologická (konkrétně srážková) data.

1 Konvenční momenty

Než přistoupíme k zavedení L-momentů, je vhodné připomenout již známé konvenční momenty. Je to potřebné proto, že o L-momentech budeme hovořit jako o analogii ke konvenčním momentům. Tvar pravděpodobnostního rozdělení je tradičně popisován charakteristikami, které shrneme v této kapitole zpracované podle literatury [1] a [9].

1.1 Teoretické konvenční momenty

Nechť X je náhodná veličina se spojitým rozdělením s hustotou $f(x)$. Pokud je integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx \quad (1.1)$$

konečný, pak integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx \quad (1.2)$$

nazveme **střední hodnotou** náhodné veličiny X a označíme ho $E X$. Tato veličina vyjadřuje průměrnou hodnotu náhodné veličiny X . Někdy se střední hodnota nazývá populační průměr a značí se μ .

Další důležitou charakteristikou je rozptyl náhodné veličiny X . Předpokládejme, že X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou $E X$. Výraz

$$\text{var } X = E (X - E X)^2 \quad (1.3)$$

(pokud střední hodnota na pravé straně existuje) se nazývá **rozptyl** nebo také **variance** náhodné veličiny X . Druhá odmocnina z rozptylu $\sqrt{\text{var } X}$ se nazývá **směrodatná odchylka** náhodné veličiny X . Rozptyl charakterizuje velikost odchylky náhodné veličiny X od střední hodnoty. Někdy se rozptyl značí σ^2 a směrodatná odchylka σ . Často se pro výpočet rozptylu používá vztah

$$\text{var } X = E X^2 - (E X)^2. \quad (1.4)$$

K popisu pravděpodobnostního rozdělení se zavádějí i další charakteristiky náhodné veličiny X . Nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou $E X$. Charakteristika

$$\mu'_r = E X^r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.5)$$

se nazývá **r-tý obecný moment** náhodné veličiny X a charakteristika

$$\mu_r = E (X - E X)^r, \quad r = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

se nazývá **r-tý centrální moment** náhodné veličiny X . Střední hodnota je tedy první obecný moment a rozptyl je druhý centrální moment.

Další užívanou charakteristikou je **momentový poměr**

$$\alpha_r = \frac{\mu_r}{\sigma^r}, \quad (1.7)$$

který získáme jako podíl r -tého centrálního momentu a směrodatné odchylky umocněné na r za předpokladu, že $\sigma > 0$. Speciálně třetí momentový poměr se nazývá **koefficient šikmosti** náhodné veličiny X

$$\alpha_3 = \frac{E (X - E X)^3}{(\sqrt{\text{var } X})^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}, \quad (1.8)$$

čtvrtý momentový poměr se nazývá **koefficient špičatosti**¹ náhodné veličiny X

$$\alpha_4 = \frac{E (X - E X)^4}{(\text{var } X)^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}. \quad (1.9)$$

1.2 Výběrové konvenční momenty

Jak již bylo uvedeno, pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X můžeme charakterizovat prostřednictvím střední hodnoty $E X$, rozptylu $\text{var } X$, koeficientu šikmosti α_3 a koeficientu špičatosti α_4 . Tyto charakteristiky jsou definovány pro pravděpodobnostní rozdělení, často jsou ale odhadovány z konečné množiny statistických pozorování.

¹V některé literatuře se koefficient špičatosti objevuje ve tvaru $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$, viz např. [9].

Uvažujme soubor tvořený N prvky, který je natolik veliký, že není možné zjistit hodnotu u každého z jeho prvků. Proto vybereme náhodně skupinu $n < N$ statistických pozorování, u nichž změříme sledovaný znak. Číslo n se nazývá rozsah výběru a skupina n statistických pozorování se nazývá náhodný výběr. Náhodný výběr je tedy vektor (X_1, X_2, \dots, X_n) náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n , které jsou nezávislé a stejně rozdělené. Prostřednictvím náhodného výběru odhadneme výše uvedené momenty. Odhady těchto momentů nazýváme výběrové momenty.

Střední hodnotu odhadneme veličinou

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (1.10)$$

která se nazývá **výběrový průměr**. Jako odhad rozptylu použijeme **výběrový rozptyl** definovaný vztahem

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad n \geq 2. \quad (1.11)$$

Podobně jako koeficient šikmosti a špičatosti zavedeme **výběrový koeficient šikmosti**

$$a_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.12)$$

a **výběrový koeficient špičatosti**²

$$a_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2}. \quad (1.13)$$

²Výběrový koeficient špičatosti je stejně jako koeficient špičatosti někdy uváděn ve tvaru

$$a_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right)^2} - 3.$$

2 L-momenty

Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X charakterizujeme prostřednictvím konvenčních momentů uvedených v kapitole 1, které popisují různé vlastnosti pravděpodobnostního rozdělení. Hosking [4] uvádí alternativní způsob, jak charakterizovat pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X . Hosking zavedl L-momenty v roce 1990 a definoval je jako lineární kombinaci uspořádaných dat.

2.1 Teoretické L-momenty

2.1.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 1. Nechť X je náhodná veličina s distribuční funkcí $F(x)$ a kvantilovou funkcí $x(F)$. Nechť $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ jsou pořádkové statistiky náhodného výběru o velikosti n vybraného z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny X . **L-momenty** náhodné veličiny X definujeme

$$\lambda_r = r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E} X_{r-k:r}, \quad r = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Písmenem L v pojmu L-moment chtěl Hosking zdůraznit *lineární* kombinaci uspořádaných dat.

Dle Hoskinga [4] může být střední hodnota pořádkové statistiky psána ve tvaru

$$\mathbb{E} X_{j:r} = \frac{r!}{(j-1)!(r-j)!} \int x \{F(x)\}^{j-1} \{1-F(x)\}^{r-j} dF(x).$$

Nahrazením tohoto výrazu v předchozí definici a upravením dostaneme

$$\lambda_r = \int_0^1 x(F) P_{r-1}^*(F) dF, \quad r = 1, 2, \dots,$$

kde $P_r^*(F) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} \binom{r+k}{k} F^k$ je r -tý posunutý Legendrův polynom³. Odtud pak dosazením získáme vztahy

³Definice Legendrova polynomu je uvedena v TAYLOR, A. E. Úvod do funkcionální analýzy. Praha: Academia, 1973. 412 s. na str. 125.

$$\begin{aligned}
\lambda_r &= r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} \mathbb{E} X_{r-k:r} = \\
&= \int_0^1 x(F) \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^{r-k-1} \binom{r-1}{k} \binom{r+k-1}{k} F^k \mathrm{d}F, \quad r = 1, 2, \dots, \quad (2.2)
\end{aligned}$$

ze kterých určíme tvar prvních čtyř L-momentů:

$$\lambda_1 = \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{0}{k} \mathbb{E} X_{1-k:1} = \mathbb{E} (X_{1:1}) = \mathbb{E} X \quad (2.3)$$

$$= \int_0^1 x(F) \sum_{k=0}^0 (-1)^{-k} \binom{0}{k} \binom{k}{k} F^k \mathrm{d}F = \int_0^1 x(F) \mathrm{d}F, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} \mathbb{E} X_{2-k:2} = \frac{1}{2} \left[\binom{1}{0} \mathbb{E} X_{2:2} - \binom{1}{1} \mathbb{E} X_{1:2} \right] = \\
&= \frac{1}{2} (\mathbb{E} X_{2:2} - \mathbb{E} X_{1:2}) \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x(F) \sum_{k=0}^1 (-1)^{1-k} \binom{1}{k} \binom{1+k}{k} F^k \mathrm{d}F = \\
&= \int_0^1 x(F) \left[-\binom{1}{0} \binom{1}{0} + \binom{1}{1} \binom{2}{1} F \right] \mathrm{d}F = \int_0^1 x(F) (2F - 1) \mathrm{d}F, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} \mathbb{E} X_{3-k:3} = \frac{1}{3} \left[\binom{2}{0} \mathbb{E} X_{3:3} - \binom{2}{1} \mathbb{E} X_{2:3} + \binom{2}{2} \mathbb{E} X_{1:3} \right] = \\
&= \frac{1}{3} (\mathbb{E} X_{3:3} - 2\mathbb{E} X_{2:3} + \mathbb{E} X_{1:3}) \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x(F) \sum_{k=0}^2 (-1)^{2-k} \binom{2}{k} \binom{2+k}{k} F^k \mathrm{d}F = \\
&= \int_0^1 x(F) \left[\binom{2}{0} \binom{2}{0} - \binom{2}{1} \binom{3}{1} F + \binom{2}{2} \binom{4}{2} F^2 \right] \mathrm{d}F = \\
&= \int_0^1 x(F) (6F^2 - 6F + 1) \mathrm{d}F, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} E X_{4-k:4} = \\
&= \frac{1}{4} \left[\binom{3}{0} E X_{4:4} - \binom{3}{1} E X_{3:4} + \binom{3}{2} E X_{2:4} - \binom{3}{3} E X_{1:4} \right] = \\
&= \frac{1}{4} (E X_{4:4} - 3E X_{3:4} + 3E X_{2:4} - E X_{1:4}) \tag{2.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 x(F) \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} \binom{3+k}{k} F^k dF = \\
&= \int_0^1 x(F) \left[-\binom{3}{0} \binom{3}{0} + \binom{3}{1} \binom{4}{1} F - \binom{3}{2} \binom{5}{2} F^2 + \binom{3}{3} \binom{6}{3} F^3 \right] dF = \\
&= \int_0^1 x(F) (20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF. \tag{2.10}
\end{aligned}$$

Z výrazů (2.3), (2.5), (2.7) a (2.9) je vidět, že L-momenty jsou skutečně lineární kombinací uspořádaných dat, v tomto případě lineární kombinací středních hodnot pořádkových statistik.

Při zavádění konvenčních momentů se vždy předpokládá existence a konečnost jednotlivých středních hodnot. Jak uvádí Hosking [4], je tomu stejně i v případě L-momentů.

Věta 1.

1. *L-momenty λ_r , $r=1, 2, \dots$, náhodné veličiny X existují právě tehdy, když má náhodná veličina X konečnou střední hodnotu.*
2. *Pravděpodobnostní rozdělení s konečnou střední hodnotou lze charakterizovat jeho L-momenty.*

Důkaz. Důkaz je možné nalézt v [4, str. 107]. □

Výše uvedená věta tedy říká, že pokud existuje (konečná) střední hodnota náhodné veličiny X , potom L-momenty jednoznačně definují pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X .

Poznámka 1. L-momenty Cauchyho rozdělení neexistují, protože neexistuje ani jeho střední hodnota.

Poznámka 2. Existuje zobecnění L-momentů nazvané TL-momenty (trimmed L-moments), které jsou odolnější vůči odlehlým pozorováním než L-momenty a exis-

tují i v případě, že pravděpodobnostní rozdělení nemá střední hodnotu. TL-momenty zavedli Elamir a Seheult v roce 2002 a zabývají se jimi ve svém článku [3]. Tedy první TL-moment Cauchyho rozdělení existuje.

2.1.2 Teoretické L-momentové poměry

Dle Hoskinga [4] je vhodné definovat bezrozměrné verze L-momentů, takzvané **teoretické L-momentové poměry** náhodné veličiny X , které zavedeme vztahem

$$\tau_r = \lambda_r / \lambda_2, \quad r = 3, 4, \dots \quad (2.11)$$

Co se týče hodnot, kterých mohou momentové poměry (1.7) nabývat, neexistuje žádné omezení⁴. Jinak je tomu v případě L-momentových poměrů, jak tvrdí následující věta uvedená v [4].

Věta 1. *Nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou. Pak L-momentové poměry splňují nerovnost*

$$|\tau_r| < 1, \quad r = 3, 4, \dots \quad (2.12)$$

Důkaz. Důkaz lze nalézt v [4, str. 108]. □

Omezení veličin $\tau_r, r \geq 3$, považuje Hosking [4] za výhodné, neboť je jednodušší interpretovat veličinu nabývající hodnoty z intervalu $(-1, 1)$ než veličinu, která nabývá libovolné hodnoty. Hosking uvádí další omezení veličin λ_2, τ_3 a τ_4 :

$$\lambda_2 > 0, \quad \frac{1}{4}(5\tau_3^2 - 1) \leq \tau_4 < 1. \quad (2.13)$$

Odvození nerovností lze taktéž nalézt v [4].

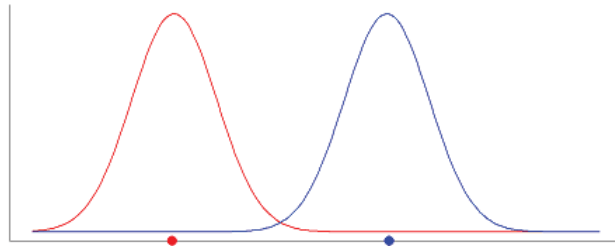
2.1.3 L-poloha, L-rozptyl, L-šikmost, L-špičatost

Ještě jednou připomeňme, že pravděpodobnostní rozdělení popisujeme charakteristikami uvedenými v první kapitole. Dále jsme uvedli Větu 1, která říká, že pokud existuje (konečná) střední hodnota náhodné veličiny X , potom lze pravděpodobnostní

⁴Výběrové momentové poměry, které jsou odhady momentových poměrů, však omezeny jsou. Tyto meze závisejí na rozsahu výběru n , viz např. [5].

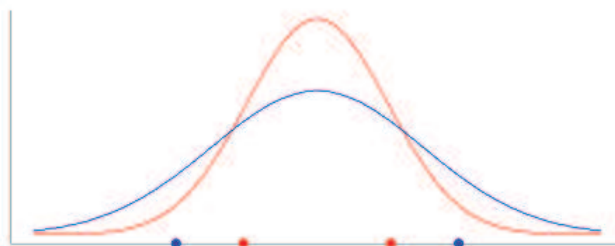
rozdělení náhodné veličiny X charakterizovat pomocí L-momentů. Budeme se proto zabírat hledáním analogie mezi L-momenty a klasickými konvenčními momenty. Interpretaci L-momentů a L-momentových poměrů vysvětluje Hosking [5] pomocí pořádkových statistik.

Jelikož se první L-moment λ_1 rovná střední hodnotě $E X$ náhodné veličiny X , vyjadřuje míru polohy a nazývá se **L-poloha**.



Obrázek 1: Interpretace prvního L-momentu λ_1

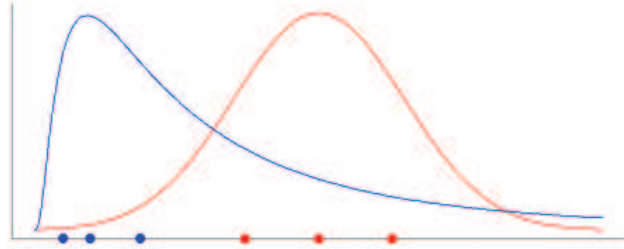
Druhý L-moment λ_2 vyjadřuje míru rozptýlu a nazývá se **L-rozptyl**. K interpretaci druhého L-momentu uvažujme pořádkové statistiky $X_{1:2}$ a $X_{2:2}$. Pokud jsou $X_{1:2}$ a $X_{2:2}$ blízko sebe, potom je pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X málo rozptýlené kolem střední hodnoty. Jsou-li $X_{1:2}$ a $X_{2:2}$ daleko od sebe, potom je pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X více rozptýlené kolem střední hodnoty.



Obrázek 2: Interpretace druhého L-momentu λ_2

K interpretaci třetího L-momentu λ_3 uvažujme opět pořádkové statistiky náhodného výběru o velikosti 3: $X_{1:3}$, $X_{2:3}$ a $X_{3:3}$. Pokud jsou $X_{1:3}$, $X_{2:3}$ a $X_{3:3}$ od sebe navzájem stejně vzdálené, třetí L-moment λ_3 je nulový a pravděpodobnostní rozdělení je symetrické. Pokud platí $X_{3:3} - X_{2:3} < X_{2:3} - X_{1:3}$, tj. odlehlejší pozorování leží vlevo od střední hodnoty, má pravděpodobnostní rozdělení zápornou

šikmost. Analogicky, pravděpodobnostní rozdělení má kladnou šikmost, pokud platí $X_{3:3} - X_{2:3} > X_{2:3} - X_{1:3}$, tj. odlehlejší pozorování leží vpravo od střední hodnoty. Třetí L-moment λ_3 vyjadřuje míru šikmosti.



Obrázek 3: Interpretace třetího L-momentu λ_3

Interpretace čtvrtého L-momentu λ_4 není zdaleka tak jednoduchá jako interpretace předchozích L-momentů, proto se jí nebudeme zabírat a odkazujeme čtenáře na literaturu [5]. Jen zmíníme, že čtvrtý L-moment λ_4 vyjadřuje míru špičatosti.

Vzhledem k definici L-momentových poměrů je třetí L-momentový poměr τ_3 a čtvrtý L-momentový poměr τ_4 vhodnou mírou šikmosti a špičatosti, podobně jako koeficient šikmosti α_3 a koeficient špičatosti α_4 . Třetí L-momentový poměr se nazývá **L-šikmost**, čtvrtý L-momentový poměr se nazývá **L-špičatost**.

Tabulka 1: Analogie teoretických L-momentů a konvenčních momentů

Označení	Název	Označení	Název
λ_1	L-poloha	$E X$	střední hodnota
λ_2	L-rozptyl	$\text{var } X$	rozptyl
τ_3	L-šikmost	α_3	koeficient šikmosti
τ_4	L-špičatost	α_4	koeficient špičatosti

Závěrem můžeme říci, že vzhledem k uvedené analogii L-momentů λ_r ke konvenčním momentům a k analogii L-momentových poměrů τ_r k momentovým poměrům α_r lze pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny X charakterizovat veličinami λ_r a τ_r .

2.2 Výběrové L-momenty

Stejně jako v případě konvenčních momentů je v praxi potřeba L-momenty odhadnout z dostupných hodnot, tedy z náhodného výběru. Proto také u L-momentů uvažujeme výběrové L-momenty. Definici výběrových L-momentů zavedl Hosking [4].

2.2.1 Definice a základní vlastnosti

Definice 2. Nechť $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ jsou pořádkové statistiky náhodných pozorování o velikosti n vybrané z pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny X . **R-tý výběrový L-moment** definujeme

$$l_r = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \leq i_1} \sum_{< i_2} \dots \sum_{< i_r \leq n} r^{-1} \sum_{k=0}^{r-1} (-1)^k \binom{r-1}{k} x_{i_{r-k}:n}, \quad r = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

První čtyři výběrové L-momenty jsou

$$l_1 = \binom{n}{1}^{-1} \sum_{i=1}^n x_{i:n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{i:n}, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} l_2 &= \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} x_{i_{2-k}:n} = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=i_1+1}^n (x_{i_2:n} - x_{i_1:n}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} l_3 &= \binom{n}{3}^{-1} \sum_{i_1=1}^{n-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-1} \sum_{i_3=i_2+1}^n \frac{1}{3} \sum_{k=0}^2 (-1)^k \binom{2}{k} x_{i_{3-k}:n} = \\ &= \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i_1=1}^{n-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-1} \sum_{i_3=i_2+1}^n \left[\binom{2}{0} x_{i_3:n} - \binom{2}{1} x_{i_2:n} + \binom{2}{2} x_{i_1:n} \right] = \\ &= \frac{1}{2n(n-1)(n-2)} \sum_{i_1=1}^{n-2} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-1} \sum_{i_3=i_2+1}^n (x_{i_3:n} - 2x_{i_2:n} + x_{i_1:n}), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
l_4 &= \binom{n}{4}^{-1} \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-2} \sum_{i_3=i_2+1}^{n-1} \sum_{i_4=i_3+1}^n \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 (-1)^k \binom{3}{k} x_{i_4-k:n} = \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-2} \sum_{i_3=i_2+1}^{n-1} \sum_{i_4=i_3+1}^n \left[\binom{3}{0} x_{i_4:n} - \binom{3}{1} x_{i_3:n} + \right. \\
&\quad \left. + \binom{3}{2} x_{i_2:n} - \binom{3}{3} x_{i_1:n} \right] = \\
&= \frac{6}{n(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i_1=1}^{n-3} \sum_{i_2=i_1+1}^{n-2} \sum_{i_3=i_2+1}^{n-1} \sum_{i_4=i_3+1}^n (x_{i_4:n} - 3x_{i_3:n} + \\
&\quad + 3x_{i_2:n} - x_{i_1:n}). \tag{2.18}
\end{aligned}$$

Povšimněme si, že první čtyři výběrové L-momenty (2.15) až (2.18) jsou opět lineární kombinací uspořádaných náhodných pozorování $x_{1:n}, x_{2:n}, \dots, x_{n:n}$.

Jak uvádí Hosking [4], výběrové L-momenty zastávají podobnou funkci jako výběrové konvenční momenty: charakterizují základní vlastnosti náhodných pozorování (poloha, rozptyl, šikmost a špičatost), odhadují odpovídající charakteristiky pravděpodobnostního rozdělení a používají se pro odhad parametrů pravděpodobnostního rozdělení, ze kterého data pocházejí.

První výběrový L-moment l_1 je totožný s výběrovým průměrem, proto se nazývá **výběrový L-průměr**. Druhý výběrový L-moment l_2 se nazývá **výběrový L-rozptyl**.

Hosking [4] upřednostňuje L-momenty před konvenčními momenty vzhledem k tomu, že jsou lineární kombinací dat, tudíž jsou méně citlivé vůči odlehlým pozorováním, a proto dávají přesnější a odolnější odhady parametrů nebo základních charakteristik pravděpodobnostního rozdělení.

2.2.2 Výběrové L-momentové poměry

Ve své studii Hosking [4] analogicky definuje **výběrové L-momentové poměry** vztahem

$$t_r = l_r / l_2, \quad r = 3, 4, \dots, \tag{2.19}$$

které jsou odhady teoretických L-momentových poměrů τ_r . Třetí výběrový L-momentový poměr t_3 se nazývá **výběrová L-šikmost**, čtvrtý výběrový L-momentový poměr t_4 se nazývá **výběrová L-špičatost**.

Tabulka 2: Analogie výběrových L-momentů a konvenčních momentů

Označení	Název	Označení	Název
l_1	výběrový L-průměr	\bar{X}	výběrový průměr
l_2	výběrový L-rozptyl	S^2	výběrový rozptyl
t_3	výběrová L-šikmost	a_3	výběrový koeficient šikmosti
t_4	výběrová L-špičatost	a_4	výběrový koeficient špičatosti

3 L-momenty vybraných pravděpodobnostních rozděléní

V této kapitole se budeme věnovat výpočtu L-momentů a L-momentových poměrů pravděpodobnostního rozděléní. Spočítáme zde první čtyři L-momenty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ a třetí a čtvrtý L-momentový poměr τ_3, τ_4 šesti vybraných spojitých rozděléní. Zvolili jsme pět dvouparametrických rozděléní: rovnoměrné, exponenciální, normální, logistické a Paretovo rozděléní, a tříparametrické zobecněné Paretovo rozděléní. U jednotlivých rozděléní je uvedena hustota $f(x)$, distribuční funkce $F(x)$ a kvantilová funkce $x(F)$. K výpočtu L-momentů použijeme vztahy (2.4), (2.6), (2.8) a (2.10), do kterých dosadíme kvantilovou funkci daného pravděpodobnostního rozděléní. K výpočtu třetího a čtvrtého L-momentového poměru použijeme již vypočtený druhý, třetí a čtvrtý L-moment, které dosadíme do vztahu (2.11).

3.1 Rovnoměrné rozděléní $R(\alpha, \beta)$

Nechť (α, β) je interval, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$. Rovnoměrné rozděléní má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{pro } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (3.1)$$

distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq \alpha, \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{pro } \alpha < x < \beta, \\ 1 & \text{pro } x \geq \beta, \end{cases} \quad (3.2)$$

a kvantilovou funkci

$$x(F) = \alpha + (\beta - \alpha)F. \quad (3.3)$$

První L-moment:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \int_0^1 x(F) \, dF = \\ &= \int_0^1 [\alpha + (\beta - \alpha)F] \, dF = \\ &= \alpha[F]_0^1 + (\beta - \alpha) \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + \beta)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Druhý L-moment:

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \int_0^1 x(F)(2F - 1) \, dF = \\ &= \int_0^1 [\alpha + (\beta - \alpha)F](2F - 1) \, dF = \\ &= \int_0^1 (\alpha + \beta F - \alpha F)(2F - 1) \, dF = \\ &= \int_0^1 [(-2\alpha + 2\beta)F^2 + (3\alpha - \beta)F - \alpha] \, dF = \\ &= 2(\beta - \alpha) \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + (3\alpha - \beta) \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \alpha[F]_0^1 = \\ &= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)\end{aligned}\tag{3.5}$$

Třetí L-moment:

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) \, dF = \\ &= \int_0^1 [\alpha + (\beta - \alpha)F](6F^2 - 6F + 1) \, dF =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 [6(\beta - \alpha)F^3 + 6(2\alpha - \beta)F^2 + (\beta - 7\alpha)F + \alpha] dF = \\
&= 6(\beta - \alpha) \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 + 6(2\alpha - \beta) \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + (\beta - 7\alpha) \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \alpha[F]_0^1 = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Třetí L-momentový poměr:

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2 = 0 \tag{3.7}$$

Čtvrtý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF = \\
&= \int_0^1 [\alpha + (\beta - \alpha)F](20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF = \\
&= \int_0^1 [20(\beta - \alpha)F^4 + 10(5\alpha - 3\beta)F^3 - 6(7\alpha - 2\beta)F^2 + \\
&\quad + (13\alpha - \beta)F - \alpha] dF = \\
&= 20(\beta - \alpha) \left[\frac{F^5}{5} \right]_0^1 + 10(5\alpha - 3\beta) \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 - 6(7\alpha - 2\beta) \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + \\
&\quad + (13\alpha - \beta) \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \alpha[F]_0^1 = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Čtvrtý L-momentový poměr:

$$\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2 = 0 \tag{3.9}$$

3.2 Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\xi, \alpha)$

Nechť $\xi \in \mathbb{R}$ je parametr polohy a $\alpha > 0$ parametr rozptylu. Exponenciální rozdělení má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x-\xi}{\alpha}} & \text{pro } x > \xi, \\ 0 & \text{pro } x \leq \xi, \end{cases} \quad (3.10)$$

distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x-\xi}{\alpha}} & \text{pro } x > \xi, \\ 0 & \text{pro } x \leq \xi, \end{cases} \quad (3.11)$$

a kvantilovou funkci

$$x(F) = \xi - \alpha \ln(1 - F). \quad (3.12)$$

První L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 x(F) \, dF = \int_0^1 [\xi - \alpha \ln(1 - F)] \, dF = \\ &= \xi[F]_0^1 - \alpha \int_0^1 \ln(1 - F) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\ &= \xi - \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{F}{1 - F} \, dF = \\ &= \xi - \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 - \alpha \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{1 - F} \right) \, dF = \\ &= \xi - \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 + \alpha[F]_0^1 + \alpha[\ln(1 - F)]_0^1 = \\ &= \xi + \alpha - \alpha[F \ln(1 - F) - \ln(1 - F)]_0^1 = \\ &= \xi + \alpha - \alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [F \ln(1 - F) - \ln(1 - F)] = \\ &= \xi + \alpha \end{aligned} \quad (3.13)$$

Druhý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int_0^1 x(F)(2F - 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 [\xi - \alpha \ln(1 - F)](2F - 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 [2\xi F - \xi - 2\alpha F \ln(1 - F) + \alpha \ln(1 - F)] \, dF = \\
&= 2\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \xi[F]_0^1 - 2\alpha \int_0^1 F \ln(1 - F) \, dF + \alpha \int_0^1 \ln(1 - F) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= -\alpha[F^2 \ln(1 - F)]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{F^2}{1 - F} \, dF + \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 + \\
&\quad + \alpha \int_0^1 \frac{F}{1 - F} \, dF = \\
&= -\alpha[F^2 \ln(1 - F)]_0^1 + \alpha \int_0^1 \left(F + 1 - \frac{1}{1 - F} \right) \, dF + \\
&\quad + \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 - \alpha \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 - F} \right) \, dF = \\
&= -\alpha[F^2 \ln(1 - F)]_0^1 + \alpha \left[\frac{F^2}{2} + F \right]_0^1 + \alpha[\ln(1 - F)]_0^1 + \\
&\quad + \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 - \alpha[F]_0^1 + [\ln(1 - F)]_0^1 = \\
&= -\alpha[F^2 \ln(1 - F) - \ln(1 - F) - F \ln(1 - F) + \ln(1 - F)]_0^1 + \frac{1}{2}\alpha = \\
&= -\alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [F^2 \ln(1 - F) - \ln(1 - F) - F \ln(1 - F) + \ln(1 - F)] + \frac{1}{2}\alpha = \\
&= \frac{1}{2}\alpha \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Třetí L-moment:

$$\lambda_3 = \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) \, dF =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 [\xi - \alpha \ln(1 - F)](6F^2 - 6F + 1) dF = \\
&= \int_0^1 [6\xi F^2 - 6\xi F + \xi - 6\alpha F^2 \ln(1 - F) + 6\alpha F \ln(1 - F) - \\
&\quad - \alpha \ln(1 - F)] dF = \\
&= 6\xi \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 - 6\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \xi[F]_0^1 - 6\alpha \int_0^1 F^2 \ln(1 - F) dF + \\
&\quad + 6\alpha \int_0^1 F \ln(1 - F) dF - \alpha \int_0^1 \ln(1 - F) dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= -2\alpha [F^3 \ln(1 - F)]_0^1 - 2\alpha \int_0^1 \frac{F^3}{1 - F} dF + 3\alpha [F^2 \ln(1 - F)]_0^1 + \\
&\quad + 3\alpha \int_0^1 \frac{F^2}{1 - F} dF - \alpha [F \ln(1 - F)]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{F}{1 - F} dF = \\
&= -2\alpha [F^3 \ln(1 - F)]_0^1 + 2\alpha \int_0^1 \left(F^2 + F + 1 - \frac{1}{1 - F} \right) dF + \\
&\quad + 3\alpha [F^2 \ln(1 - F)]_0^1 + 3\alpha \int_0^1 \left(F + 1 - \frac{1}{1 - F} \right) dF - \\
&\quad - \alpha [F \ln(1 - F)]_0^1 + \alpha \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 - F} \right) dF = \\
&= -2\alpha [F^3 \ln(1 - F)]_0^1 + 2\alpha \left[\frac{F^3}{3} + \frac{F^2}{2} + F \right]_0^1 + 2\alpha [\ln(1 - F)]_0^1 + \\
&\quad + 3\alpha [F^2 \ln(1 - F)]_0^1 - 3\alpha \left[\frac{F^2}{2} + F \right]_0^1 - 3\alpha [\ln(1 - F)]_0^1 - \\
&\quad - \alpha [F \ln(1 - F)]_0^1 + \alpha [F]_0^1 + \alpha [\ln(1 - F)]_0^1 = \\
&= -\alpha [2F^3 \ln(1 - F) - 2\ln(1 - F) - 3F^2 \ln(1 - F) + 3\ln(1 - F) + \\
&\quad + F \ln(1 - F) \ln(1 - F)]_0^1 + \frac{1}{6}\alpha = \\
&= -\alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [2F^3 \ln(1 - F) - 2\ln(1 - F) - 3F^2 \ln(1 - F) + 3\ln(1 - F) + \\
&\quad + F \ln(1 - F) - \ln(1 - F)] + \frac{1}{6}\alpha = \\
&= \frac{1}{6}\alpha
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Třetí L-momentový poměr:

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2 = \frac{1}{3} \quad (3.16)$$

Čtvrtý L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) \, dF = \\ &= \int_0^1 [\xi - \alpha \ln(1 - F)](20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) \, dF = \\ &= \int_0^1 [20\xi F^3 - 30\xi F^2 + 12\xi F - \xi - 20\alpha F^3 \ln(1 - F) + \\ &\quad + 30\alpha F^2 \ln(1 - F) - 12\alpha F \ln(1 - F) + \alpha \ln(1 - F)] \, dF = \\ &= 20\xi \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 - 30\xi \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + 12\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \xi[F]_0^1 - \\ &\quad - 20\alpha \int_0^1 F^3 \ln(1 - F) \, dF + 30\alpha \int_0^1 F^2 \ln(1 - F) \, dF - \\ &\quad - 12\alpha \int_0^1 F \ln(1 - F) \, dF + \alpha \int_0^1 \ln(1 - F) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\ &= -5\alpha[F^4 \ln(1 - F)]_0^1 - 5\alpha \int_0^1 \frac{F^4}{1 - F} \, dF + 10\alpha[F^3 \ln(1 - F)]_0^1 + \\ &\quad + 10\alpha \int_0^1 \frac{F^3}{1 - F} \, dF - 6\alpha[F^2 \ln(1 - F)]_0^1 - 6\alpha \int_0^1 \frac{F^2}{1 - F} \, dF + \\ &\quad + \alpha[F \ln(1 - F)]_0^1 + \alpha \int_0^1 \frac{F}{1 - F} \, dF = \\ &= -5\alpha[F^4 \ln(1 - F)]_0^1 + 5\alpha \int_0^1 \left(F^3 + F^2 + F + 1 - \frac{1}{1 - F} \right) \, dF + \\ &\quad + 10\alpha[F^3 \ln(1 - F)]_0^1 - 10\alpha \int_0^1 \left(F^2 + F + 1 - \frac{1}{1 - F} \right) \, dF - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6\alpha[F^2 \ln(1-F)]_0^1 + 6\alpha \int_0^1 \left(F + 1 - \frac{1}{1-F}\right) dF + \\
& + \alpha[F \ln(1-F)]_0^1 - \alpha \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1-F}\right) dF = \\
& = -5\alpha[F^4 \ln(1-F)]_0^1 + 5\alpha \left[\frac{F^4}{4} + \frac{F^3}{3} + \frac{F^2}{2} + F\right]_0^1 + 5\alpha[\ln(1-F)]_0^1 + \\
& + 10\alpha[F^3 \ln(1-F)]_0^1 - 10\alpha \left[\frac{F^3}{3} + \frac{F^2}{2} + F\right]_0^1 - 10\alpha[\ln(1-F)]_0^1 - \\
& - 6\alpha[F^2 \ln(1-F)]_0^1 + 6\alpha \left[\frac{F^2}{2} + F\right]_0^1 + 6\alpha[\ln(1-F)]_0^1 + \\
& + \alpha[F \ln(1-F)]_0^1 - \alpha[F]_0^1 - \alpha[\ln(1-F)]_0^1 = \\
& = -\alpha[5F^4 \ln(1-F) - 5\ln(1-F) - 10F^3 \ln(1-F) + 10\ln(1-F) + \\
& + 6F^2 \ln(1-F) - 6\ln(1-F) - F \ln(1-F) + \ln(1-F)]_0^1 + \frac{1}{12}\alpha = \\
& = -\alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [5F^4 \ln(1-F) - 5\ln(1-F) - 10F^3 \ln(1-F) + \\
& + 10\ln(1-F) + 6F^2 \ln(1-F) - 6\ln(1-F) - F \ln(1-F) + \\
& + \ln(1-F)] + \frac{1}{12}\alpha = \\
& = \frac{1}{12}\alpha
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Čtvrtý L-momentový poměr:

$$\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2 = \frac{1}{6} \tag{3.18}$$

3.3 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Nechť $\mu \in \mathbb{R}$ je parametr polohy a $\sigma^2 > 0$ parametr rozptylu. Normální rozdělení má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.19}$$

a distribuční funkci

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad \text{kde } \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.20)$$

Distribuční ani kvantilová funkce nemá explicitní tvar, jsou však tabelované. Pro $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ dostaneme normované normální rozdělení $N(0, 1)$ s hustotou $\varphi(x)$ a distribuční funkcí $\Phi(x)$.

Jelikož neexistuje explicitní tvar distribuční ani kvantilové funkce, k výpočtu L-momentů je potřeba použít některou aproximaci těchto funkcí. Zvolili jsme následující aproximace⁵ distribuční a kvantilové funkce normovaného normálního rozdělení [2]

$$F(z) = 1 - 0.5 e^{-\frac{(83z+351)z+562}{703/z+165}} \quad \text{pro } 0 < z \leq 5,$$

$$z(F) = 5.063[F^{0.135} - (1 - F)^{0.135}], \quad \text{kde } z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Pokud bychom počítali L-momenty normálního rozdělení, které není normované, aproximace distribuční funkce by se modifikovala do tvaru

$$x(F) = 5.063 \sigma [F^{0.135} - (1 - F)^{0.135}] + \mu, \quad (3.21)$$

neboť $x = z\sigma + \mu$. Aproximaci kvantilové funkce (3.21) použijeme k výpočtu L-momentů normálního rozdělení.

První L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 x(F) dF = \int_0^1 \{5.063 \sigma [F^{0.135} - (1 - F)^{0.135}] + \mu\} dF = \\ &= 5.063 \sigma \left[\frac{F^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 - 5.063 \sigma \left[-\frac{(1 - F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 + \mu [F]_0^1 = \\ &= \mu \end{aligned} \quad (3.22)$$

⁵Podle zvolené aproximace normálního rozdělení se hodnoty L-momentů liší: Hosking [4] uvádí $\tau_4 = 0.1226$, námi vypočtená hodnota je $\tau_4 = 0.1244$.

Druhý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int_0^1 x(F)(2F - 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \{5.063 \sigma [F^{0.135} - (1 - F)^{0.135}] + \mu\} (2F - 1) \, dF = \\
&= 5.063 \sigma \int_0^1 [2F^{1.135} - 2F(1 - F)^{0.135} - F^{0.135} + (1 - F)^{0.135}] \, dF + \\
&\quad + 2\mu \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \mu [F]_0^1 \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 10.126 \sigma \left[\frac{F^{2.135}}{2.135} \right]_0^1 + 10.126 \sigma \left[F \frac{(1 - F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 - \\
&\quad - 10.126 \sigma \int_0^1 \frac{(1 - F)^{1.135}}{1.135} \, dF - 5.063 \sigma \left[\frac{F^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 - \\
&\quad - 5.063 \sigma \left[\frac{(1 - F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 = \\
&= \frac{10.126}{2.135} \sigma - \frac{10.126}{1.135} \sigma \left[-\frac{(1 - F)^{2.135}}{2.135} \right]_0^1 = \\
&= 0.5641 \sigma \approx \sigma \pi^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Třetí L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \{5.063 \sigma [F^{0.135} - (1 - F)^{0.135}] + \mu\} (6F^2 - 6F + 1) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 5.063 \sigma \left[\frac{1}{1.135} (6F^2 - 6F + 1) [F^{1.135} + (1 - F)^{1.135}] \right]_0^1 - \\
&\quad - \frac{30.378}{1.135} \sigma \int_0^1 (2F - 1) [F^{1.135} + (1 - F)^{1.135}] \, dF + 6\mu \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 - \\
&\quad - 6\mu \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \mu [F]_0^1 \stackrel{\text{p.p.}}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{30.378}{1.135 \cdot 2.135} \sigma[(2F-1)[F^{2.135} - (1-F)^{2.135}]]_0^1 + \\
&\quad + \frac{60.756}{1.135 \cdot 2.135^2} \sigma \int_0^1 [F^{2.135} - (1-F)^{2.135}] dF = \\
&= \frac{60.756}{1.135 \cdot 2.135^2 \cdot 3.135} \sigma[F^{3.135} + (1-F)^{3.135}]_0^1 = \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Třetí L-momentový poměr:

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2 = 0 \tag{3.25}$$

Čtvrtý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF = \\
&= \int_0^1 \{5.063\sigma[F^{0.135} - (1-F)^{0.135}] + \mu\} (20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF = \\
&= 5.063 \sigma \int_0^1 [20F^{3.135} - 30F^{2.135} + 12F^{1.135} - F^{0.135} - 20F^3(1-F)^{0.135} + \\
&\quad + 30F^2(1-F)^{0.135} - 12F(1-F)^{0.135} + (1-F)^{0.135}] dF + \\
&\quad + 20\mu \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 - 30\mu \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + 12\mu \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \mu[F]_0^1 \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 5.063 \sigma \left\{ 20 \left[\frac{F^{4.135}}{4.135} \right]_0^1 - 30 \left[\frac{F^{3.135}}{3.135} \right]_0^1 + 12 \left[\frac{F^{2.135}}{2.135} \right]_0^1 - \left[\frac{F^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 - \right. \\
&\quad - 20 \left[-F^3 \frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 - 20 \int_0^1 3F^2 \frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} dF + \\
&\quad + 30 \left[-F^2 \frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 + 30 \int_0^1 2F \frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} dF - \\
&\quad \left. - 12 \left[-F \frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 - 12 \int_0^1 \frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} dF + \left[-\frac{(1-F)^{1.135}}{1.135} \right]_0^1 \right\} \stackrel{\text{p.p.}}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 5.063 \sigma \left\{ \frac{20}{4.135} - \frac{30}{3.135} + \frac{12}{2.135} - \frac{60}{1.135} \left[-F^2 \frac{(1-F)^{2.135}}{2.135} \right]_0^1 - \right. \\
&\quad - \frac{60}{1.135} \int_0^1 2F \frac{(1-F)^{2.135}}{2.135} dF + \frac{60}{1.135} \left[-F \frac{(1-F)^{2.135}}{2.135} \right]_0^1 + \\
&\quad \left. + \frac{60}{1.135} \int_0^1 \frac{(1-F)^{2.135}}{2.135} dF - \frac{12}{1.135} \left[-\frac{(1-F)^{2.135}}{2.135} \right]_0^1 \right\} \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 5.063 \sigma \left\{ \frac{20}{4.135} - \frac{30}{3.135} + \frac{12}{2.135} - \frac{12}{1.135 \cdot 2.135} - \right. \\
&\quad - \frac{120}{1.135 \cdot 2.135} \left[-F \frac{(1-F)^{3.125}}{3.125} \right]_0^1 - \frac{120}{1.135 \cdot 2.135} \int_0^1 \frac{(1-F)^{3.135}}{3.135} dF + \\
&\quad \left. + \frac{60}{1.135 \cdot 2.135} \left[-\frac{(1-F)^{3.135}}{3.135} \right]_0^1 \right\} = \\
&= 5.063 \sigma \left\{ \frac{20}{4.135} - \frac{30}{3.135} + \frac{12}{2.135} - \frac{12}{1.135 \cdot 2.135} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{120}{1.135 \cdot 2.135 \cdot 3.135 \cdot 4.135} [(1-F)^{4.135}]_0^1 + \frac{60}{1.135 \cdot 2.135 \cdot 3.135} \right\} = \\
&= 0.0702 \sigma \tag{3.26}
\end{aligned}$$

Čtvrtý L-momentový poměr:

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2 = 0.1244 \tag{3.27}$$

3.4 Paretovo rozdělení $\text{Par}(\alpha, \beta)$

Nechť $\beta > 0$ je parametr polohy a $\alpha > 0$ parametr tvaru. Paretovo rozdělení má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{pro } x \geq \beta, \\ 0 & \text{pro } x < \beta, \end{cases} \tag{3.28}$$

distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha & \text{pro } x \geq \beta, \\ 0 & \text{pro } x < \beta, \end{cases} \quad (3.29)$$

a kvantilovou funkci

$$x(F) = \beta(1 - F)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (3.30)$$

První L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 x(F) \, dF = \\ &= \beta \int_0^1 (1 - F)^{-\frac{1}{\alpha}} \, dF = \\ &= \beta \left[-\frac{\alpha}{\alpha - 1} (1 - F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Druhý L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_0^1 x(F)(2F - 1) \, dF = \\ &= \beta \int_0^1 (1 - F)^{-\frac{1}{\alpha}} (2F - 1) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\ &= \beta \left[-\frac{\alpha}{\alpha - 1} (2F - 1)(1 - F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 + \frac{2\alpha\beta}{\alpha - 1} \int_0^1 (1 - F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \, dF = \\ &= -\frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha - 1} \left[-\frac{\alpha}{2\alpha - 1} (1 - F)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 = \\ &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Třetí L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) \, dF = \\
&= \beta \int_0^1 (1 - F)^{-\frac{1}{\alpha}} (6F^2 - 6F + 1) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= \beta \left[-\frac{\alpha}{\alpha - 1} (6F^2 - 6F + 1) (1 - F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 + \\
&\quad + \frac{6\alpha\beta}{\alpha - 1} \int_0^1 (2F - 1) (1 - F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} + \frac{6\alpha\beta}{\alpha - 1} \left[-\frac{\alpha}{2\alpha - 1} (2F - 1) (1 - F)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 + \\
&\quad + \frac{12\alpha^2\beta}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \int_0^1 (1 - F)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \, dF = \\
&= \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} - \frac{6\alpha^2\beta}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} + \\
&\quad + \frac{12\alpha^2\beta}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)} \left[-\frac{\alpha}{3\alpha - 1} (1 - F)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 = \\
&= \frac{\alpha\beta(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)(3\alpha - 1)} \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Třetí L-momentový poměr:

$$\begin{aligned}
\tau_3 &= \lambda_3/\lambda_2 = \frac{\alpha\beta(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)(3\alpha - 1)} \cdot \frac{(\alpha - 1)(2\alpha - 1)}{\alpha\beta} = \\
&= \frac{\alpha + 1}{3\alpha - 1} \tag{3.34}
\end{aligned}$$

Čtvrtý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) \, dF = \\
&= \beta \int_0^1 (1 - F)^{-\frac{1}{\alpha}} (20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \beta \left[-\frac{\alpha}{\alpha-1} (20F^3 - 30F^2 + 12F - 1)(1-F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 + \\
&\quad + \frac{12\alpha\beta}{\alpha-1} \int_0^1 (5F^2 - 5F + 1)(1-F)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= -\frac{\alpha\beta}{\alpha-1} + \frac{12\alpha\beta}{\alpha-1} \left[-\frac{\alpha}{2\alpha-1} (5F^2 - 5F + 1)(1-F)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 + \\
&\quad + \frac{60\alpha^2\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \int_0^1 (2F-1)(1-F)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}} dF = \\
&= -\frac{\alpha\beta}{\alpha-1} + \frac{12\alpha^2\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} + \\
&\quad + \frac{60\alpha^2\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \left[-\frac{\alpha}{3\alpha-1} (2F-1)(1-F)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 + \\
&\quad + \frac{120\alpha^3\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)} \int_0^1 (1-F)^{\frac{3\alpha-1}{\alpha}} dF = \\
&= -\frac{\alpha\beta}{\alpha-1} + \frac{12\alpha^2\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} - \frac{60\alpha^3\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)} + \\
&\quad + \frac{120\alpha^3\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)} \left[-\frac{\alpha}{4\alpha-1} (1-F)^{\frac{4\alpha-1}{\alpha}} \right]_0^1 = \\
&= \frac{2\alpha\beta(\alpha + \frac{1}{2})(\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)(4\alpha-1)} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

Čtvrtý L-momentový poměr:

$$\begin{aligned}
\tau_4 = \lambda_4/\lambda_2 &= \frac{2\alpha\beta(\alpha + \frac{1}{2})(\alpha+1)}{(\alpha-1)(2\alpha-1)(3\alpha-1)(4\alpha-1)} \cdot \frac{(\alpha-1)(2\alpha-1)}{\alpha\beta} = \\
&= \frac{2(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(3\alpha-1)(4\alpha-1)} \tag{3.36}
\end{aligned}$$

3.5 Logistické rozdělení $\text{Logi}(\xi, \alpha)$

Nechť $\xi \in \mathbb{R}$ je parametr polohy a $\alpha > 0$ parametr rozptylu. Logistické rozdělení má hustotu

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{(x-\xi)}{\alpha}} \left(1 + e^{-\frac{(x-\xi)}{\alpha}} \right)^{-2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{3.37}$$

distribuční funkci

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{(x-\xi)}{\alpha}}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.38)$$

a kvantilovou funkci

$$x(F) = \xi + \alpha \ln \left(\frac{1-F}{F} \right). \quad (3.39)$$

První L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 x(F) \, dF = \int_0^1 \left[\xi + \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] \, dF = \\ &= \xi[F]_0^1 + \alpha \int_0^1 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\ &= \xi + \alpha \left[F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{F}{F(1-F)} \, dF = \\ &= \xi + \alpha[F \ln F]_0^1 - \alpha[F \ln(1-F)]_0^1 + \alpha[\ln(1-F)]_0^1 = \\ &= \xi - \alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} (F \ln F) - \alpha[F \ln(1-F) - \ln(1-F)]_0^1 = \\ &= \xi - \alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} \frac{\ln F}{\frac{1}{F}} - \alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [F \ln(1-F) - \ln(1-F)] \stackrel{\text{LH}}{=} \\ &= \xi - \alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} (-F) = \\ &= \xi \end{aligned} \quad (3.40)$$

Druhý L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \int_0^1 x(F)(2F-1) \, dF = \\ &= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] (2F-1) \, dF = \\ &= \int_0^1 \left[2\xi F - \xi + 2\alpha F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) - \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] \, dF = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \xi[F]_0^1 + 2\alpha \int_0^1 F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF - \alpha \int_0^1 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 2\alpha \left[\frac{F^2}{2} \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - 2\alpha \int_0^1 \frac{F^2}{2} \frac{1}{F(1-F)} dF - \alpha \left[F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 + \\
&\quad + \alpha \int_0^1 \frac{1}{1-F} dF = \\
&= \alpha \left[F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{F}{1-F} dF - \alpha \left[F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 + \\
&\quad + \alpha \int_0^1 \frac{1}{1-F} dF = \\
&= \alpha [F^2 \ln F]_0^1 - \alpha [F^2 \ln(1-F)]_0^1 + \alpha \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1-F} \right) dF - \\
&\quad - \alpha [F \ln F]_0^1 + \alpha [F \ln(1-F)]_0^1 - \alpha [\ln(1-F)]_0^1 = \\
&= -\alpha [F^2 \ln F - F \ln F]_0^1 - \alpha [F^2 \ln(1-F)]_0^1 + \alpha [F]_0^1 + \alpha [\ln(1-F)]_0^1 - \\
&\quad + \alpha [F \ln(1-F)]_0^1 - \alpha [\ln(1-F)]_0^1 = \\
&= \alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} (F^2 \ln F - F \ln F) - \alpha [F^2 \ln(1-F) - \ln(1-F) - \\
&\quad - F \ln(1-F) + \ln(1-F)]_0^1 + \alpha = \\
&= \alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln F}{\frac{1}{F^2}} - \frac{\ln F}{\frac{1}{F}} \right) - \alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [F^2 \ln(1-F) - \ln(1-F) - \\
&\quad - F \ln(1-F) + \ln(1-F)] + \alpha \stackrel{\text{LH}}{=} \\
&= \alpha + \alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} \left(\frac{-F^2}{2} - F \right) = \\
&= \alpha
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Třetí L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) dF = \\
&= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] (6F^2 - 6F + 1) dF =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[6\xi F^2 - 6\xi F + \xi + 6\alpha F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) - 6\alpha F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] dF = \\
&= 6\xi \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 - 6\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \xi[F]_0^1 + 6\alpha \int_0^1 F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF - \\
&\quad - 6\alpha \int_0^1 F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF + \alpha \int_0^1 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 6\alpha \left[\frac{F^3}{3} \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - 6\alpha \int_0^1 \frac{F^3}{3F(1-F)} dF - 6\alpha \left[\frac{F^2}{2} \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 + \\
&\quad + 6\alpha \int_0^1 \frac{F^2}{2F(1-F)} dF + \alpha \left[F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{F}{F(1-F)} dF = \\
&= 2\alpha \left[F^3 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - 2\alpha \int_0^1 \frac{F^2}{1-F} dF - 3\alpha \left[F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 + \\
&\quad + 3\alpha \int_0^1 \frac{F}{1-F} dF + \alpha \left[F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - \alpha \int_0^1 \frac{1}{1-F} dF = \\
&= 2\alpha[F^3 \ln F]_0^1 - 2\alpha[F^3 \ln(1-F)]_0^1 - 2\alpha \int_0^1 \left(-F - 1 + \frac{1}{1-F} \right) dF - \\
&\quad - 3\alpha[F^2 \ln F]_0^1 + 3\alpha[F^2 \ln(1-F)]_0^1 + 3\alpha \int_0^1 \left(-1 + \frac{1}{1-F} \right) dF + \\
&\quad + \alpha[F \ln F]_0^1 - \alpha[F \ln(1-F)]_0^1 + \alpha[\ln(1-F)]_0^1 = \\
&= \alpha[2F^3 \ln F - 3F^2 \ln F + F \ln F]_0^1 - 2\alpha[F^3 \ln(1-F)]_0^1 + \\
&\quad + 2\alpha \left[\frac{F^2}{2} + F \right]_0^1 + 2\alpha[\ln(1-F)]_0^1 + 3\alpha[F^2 \ln(1-F)]_0^1 - \\
&\quad - 3\alpha[F]_0^1 - 3\alpha[\ln(1-F)]_0^1 - \alpha[F \ln(1-F)]_0^1 + \alpha[\ln(1-F)]_0^1 = \\
&= -\alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} (2F^3 \ln F - 3F^2 \ln F + F \ln F) - \alpha[2F^3 \ln(1-F) - \\
&\quad - 2 \ln(1-F) - 3F^2 \ln(1-F) + 3 \ln(1-F) + F \ln(1-F) + \\
&\quad + F \ln(1-F) - \ln(1-F)]_0^1 = \\
&= -\alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} \left(\frac{2 \ln F}{\frac{1}{F^3}} - \frac{3 \ln F}{\frac{1}{F^2}} + \frac{\ln F}{\frac{1}{F}} \right) - \alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [2F^3 \ln(1-F) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \ln(1-F) - 3F^2 \ln(1-F) + 3 \ln(1-F) + F \ln(1-F) + \\
& + F \ln(1-F) - \ln(1-F)] \stackrel{\text{LH}}{=} \\
& = -\alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} \left(\frac{-2F^3}{3} + \frac{3F^2}{2} - F \right) = \\
& = 0
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Třetí L-momentový poměr:

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2 = 0 \tag{3.43}$$

Čtvrtý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF = \\
&= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] (20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) dF = \\
&= \int_0^1 \left[20\xi F^3 - 30\xi F^2 + 12\xi F - \xi + 20\alpha F^3 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) - \right. \\
&\quad \left. - 30\alpha F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) + 12\alpha F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) - \alpha \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right] dF = \\
&= 20\xi \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 - 30\xi \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + 12\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \xi[F]_0^1 + \\
&\quad + 20\alpha \int_0^1 F^3 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF - 30\alpha \int_0^1 F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF + \\
&\quad + 12\alpha \int_0^1 F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF - \alpha \int_0^1 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= 5\alpha \left[F^4 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - 5\alpha \int_0^1 \frac{F^3}{1-F} dF - 10\alpha \left[F^3 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 + \\
&\quad + 10\alpha \int_0^1 \frac{F^2}{1-F} dF + 6\alpha \left[F^2 \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 - 6\alpha \int_0^1 \frac{F}{1-F} dF -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha \left[F \ln \left(\frac{F}{1-F} \right) \right]_0^1 + \alpha \int_0^1 \frac{1}{1-F} dF = \\
& = 5\alpha [F^4 \ln F]_0^1 - 5\alpha [F^4 \ln(1-F)]_0^1 + 5\alpha \int_0^1 \left(F^2 + F + 1 - \frac{1}{1-F} \right) dF - \\
& - 10\alpha [F^3 \ln F]_0^1 + 10\alpha [F^3 \ln(1-F)]_0^1 - 10\alpha \int_0^1 \left(F + 1 - \frac{1}{1-F} \right) dF + \\
& + 6\alpha [F^2 \ln F]_0^1 - 6\alpha [F^2 \ln(1-F)]_0^1 + 6\alpha \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1-F} \right) dF - \\
& - \alpha [F \ln F]_0^1 + \alpha [F \ln(1-F)]_0^1 - \alpha [\ln(1-F)]_0^1 = \\
& = \alpha [5F^4 \ln F - 10F^3 \ln F + 6F^2 \ln F - F \ln F]_0^1 - 5\alpha [F^4 \ln(1-F)]_0^1 + \\
& + 5\alpha \left[\frac{F^3}{3} + \frac{F^2}{2} + F \right]_0^1 + 5\alpha [\ln(1-F)]_0^1 + 10\alpha [F^3 \ln(1-F)]_0^1 - \\
& - 10\alpha \left[\frac{F^2}{2} + F \right]_0^1 - 10\alpha [\ln(1-F)]_0^1 - 6\alpha [F^2 \ln(1-F)]_0^1 + \\
& + 6\alpha [F]_0^1 + 6\alpha [\ln(1-F)]_0^1 + \alpha [F \ln(1-F)]_0^1 - \alpha [\ln(1-F)]_0^1 = \\
& = -\alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} (5F^4 \ln F - 10F^3 \ln F + 6F^2 \ln F - F \ln F) - \\
& - \alpha [5F^4 \ln(1-F) - 5 \ln(1-F) - 10F^3 \ln(1-F) + 10 \ln(1-F) + \\
& + 6F^2 \ln(1-F) - 6 \ln(1-F) - F \ln(1-F) + \ln(1-F)]_0^1 + \frac{1}{6}\alpha = \\
& = -\alpha \lim_{F \rightarrow 0^+} \left(\frac{5 \ln F}{\frac{1}{F^4}} - \frac{10 \ln F}{\frac{1}{F^3}} + \frac{6 \ln F}{\frac{1}{F^2}} - \frac{\ln F}{\frac{1}{F}} \right) - \alpha \lim_{F \rightarrow 1^-} [5F^4 \ln(1-F) - \\
& - 5 \ln(1-F) - 10F^3 \ln(1-F) + 10 \ln(1-F) + 6F^2 \ln(1-F) - \\
& - 6 \ln(1-F) - F \ln(1-F) + \ln(1-F)] + \frac{1}{6}\alpha \stackrel{\text{LH}}{=} \\
& = -\alpha \lim \left(-\frac{5F^4}{4} + \frac{10F^3}{3} - \frac{6F^2}{2} + F \right) + \frac{1}{6}\alpha = \\
& = \frac{1}{6}\alpha
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Čtvrtý L-momentový poměr:

$$\tau_4 = \lambda_4 / \lambda_2 = \frac{1}{6} \tag{3.45}$$

3.6 Zobecněné Paretovo rozdělení $\text{GPD}(\xi, \alpha, k)$

Nechť $\xi \in \mathbb{R}$ je parametr polohy, $\alpha > 0$ parametr rozptylu a $k \in \mathbb{R}$ parametr tvaru.

Zobecněné Paretovo rozdělení má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1-k}{k} \ln[1 - \frac{k(x-\xi)}{\alpha}]} & \text{pro } k \neq 0, \\ \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x-\xi}{\alpha}} & \text{pro } k = 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\xi \leq x \leq \xi + \frac{\alpha}{k} \quad \text{pro } k > 0, \quad x \geq \xi \quad \text{pro } k \leq 0,$$

distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{\frac{1}{k} \ln[1 - \frac{k(x-\xi)}{\alpha}]} & \text{pro } k \neq 0, \\ 1 - e^{-\frac{x-\xi}{\alpha}} & \text{pro } k = 0, \end{cases} \quad (3.47)$$

a kvantilovou funkci

$$x(F) = \begin{cases} \xi + \alpha \frac{1 - (1-F)^k}{k} & \text{pro } k \neq 0, \\ \xi - \alpha \ln(1-F) & \text{pro } k = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Zobecněné Paretovo rozdělení je pro $k = 0$ rovno exponenciálnímu rozdělení.

První L-moment:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \frac{1 - (1-F)^k}{k} \right] dF = \\ &= \xi[F]_0^1 + \frac{\alpha}{k} \int_0^1 [1 - (1-F)^k] dF = \\ &= \xi + \frac{\alpha}{k} - \frac{\alpha}{k} \left[-\frac{(1-F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \\ &= \xi + \frac{\alpha}{k+1} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Druhý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \frac{1 - (1 - F)^k}{k} \right] (2F - 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \left[2\xi F - \xi + 2\alpha F \frac{1 - (1 - F)^k}{k} - \alpha \frac{1 - (1 - F)^k}{k} \right] \, dF = \\
&= 2\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \xi[F]_0^1 + 2\frac{\alpha}{k} \int_0^1 F[1 - (1 - F)^k] \, dF - \\
&\quad - \frac{\alpha}{k} \int_0^1 [1 - (1 - F)^k] \, dF = \\
&= \frac{2\alpha}{k} \int_0^1 [F - F(1 - F)^k] \, dF - \frac{\alpha}{k}[F]_0^1 + \frac{\alpha}{k} \left[-\frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= \frac{2\alpha}{k} \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \frac{2\alpha}{k} \left[F \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 - \frac{2\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 (1 - F)^{k+1} \, dF - \frac{\alpha}{k} + \\
&\quad + \frac{\alpha}{k(k+1)} = \\
&= \frac{\alpha}{k(k+1)} - \frac{2\alpha}{k(k+1)} \left[-\frac{(1 - F)^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 = \\
&= \frac{\alpha}{(k+1)(k+2)} \tag{3.50}
\end{aligned}$$

Třetí L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_3 &= \int_0^1 x(F)(6F^2 - 6F + 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \frac{1 - (1 - F)^k}{k} \right] (6F^2 - 6F + 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \left[6\xi F^2 - 6\xi F + \xi + 6\alpha F^2 \frac{1 - (1 - F)^k}{k} - 6\alpha F \frac{1 - (1 - F)^k}{k} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha \frac{1 - (1 - F)^k}{k} \right] \, dF = \\
&= 6\xi \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 - 6\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \xi[F]_0^1 + \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 F^2[1 - (1 - F)^k] \, dF -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{6\alpha}{k} \int_0^1 F[1 - (1 - F)^k] dF + \frac{\alpha}{k} \int_0^1 [1 - (1 - F)^k] dF = \\
& = \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 [F^2 - F^2(1 - F)^k] dF - \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 [F - F(1 - F)^k] dF + \\
& + \frac{\alpha}{k} \int_0^1 [1 - (1 - F)^k] dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
& = \frac{6\alpha}{k} \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 - \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 F^2(1 - F)^k dF - \frac{6\alpha}{k} \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 + \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 F(1 - F)^k dF + \\
& + \frac{\alpha}{k} [F]_0^1 - \frac{\alpha}{k} \int_0^1 (1 - F)^k dF = \\
& = -\frac{6\alpha}{k} \int_0^1 F^2(1 - F)^k dF + \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 F(1 - F)^k dF - \frac{\alpha}{k} \int_0^1 (1 - F)^k dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
& = \frac{6\alpha}{k} \left[F^2 \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 - \frac{12\alpha}{k} \int_0^1 F \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} dF - \frac{6\alpha}{k} \left[F \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 + \\
& + \frac{6\alpha}{k} \int_0^1 \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} dF + \frac{\alpha}{k} \left[\frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \\
& = \frac{-12\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 F(1 - F)^{k+1} dF + \frac{6\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 (1 - F)^{k+1} dF - \frac{\alpha}{k(k+1)} \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
& = \frac{12\alpha}{k(k+1)} \left[F \frac{(1 - F)^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 - \frac{12\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 \frac{(1 - F)^{k+2}}{k+2} dF - \\
& - \frac{6\alpha}{k(k+1)} \left[\frac{(1 - F)^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 - \frac{\alpha}{k(k+1)} = \\
& = \frac{12\alpha}{k(k+1)(k+2)} \left[\frac{(1 - F)^{k+3}}{k+3} \right]_0^1 + \frac{6\alpha}{k(k+1)(k+2)} - \frac{\alpha}{k(k+1)} = \\
& = \frac{\alpha(1 - k)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \tag{3.51}
\end{aligned}$$

Třetí L-momentový poměr:

$$\tau_3 = \lambda_3/\lambda_2 = \frac{\alpha(1 - k)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{\alpha} = \frac{1 - k}{3 + k} \tag{3.52}$$

Čtvrtý L-moment:

$$\begin{aligned}
\lambda_4 &= \int_0^1 x(F)(20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \left[\xi + \alpha \frac{1 - (1 - F)^k}{k} \right] (20F^3 - 30F^2 + 12F - 1) \, dF = \\
&= \int_0^1 \left[20\xi F^3 - 30\xi F^2 + 12\xi F - \xi + 20\alpha F^3 \frac{1 - (1 - F)^k}{k} - \right. \\
&\quad \left. - 30\alpha F^2 \frac{1 - (1 - F)^k}{k} + 12\alpha F \frac{1 - (1 - F)^k}{k} - \alpha \frac{1 - (1 - F)^k}{k} \right] \, dF = \\
&= 20\xi \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 - 30\xi \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + 12\xi \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \xi[F]_0^1 + \\
&\quad + \frac{20\alpha}{k} \int_0^1 [F^3 - F^3(1 - F)^k] \, dF - \frac{30\alpha}{k} \int_0^1 [F^2 - F^2(1 - F)^k] \, dF + \\
&\quad + \frac{12\alpha}{k} \int_0^1 [F - F(1 - F)^k] \, dF - \frac{\alpha}{k} \int_0^1 [1 - (1 - F)^k] \, dF = \\
&= \frac{20\alpha}{k} \left[\frac{F^4}{4} \right]_0^1 - \frac{20\alpha}{k} \int_0^1 F^3(1 - F)^k \, dF - \frac{30\alpha}{k} \left[\frac{F^3}{3} \right]_0^1 + \\
&\quad + \frac{30\alpha}{k} \int_0^1 F^2(1 - F)^k \, dF + \frac{12\alpha}{k} \left[\frac{F^2}{2} \right]_0^1 - \frac{12\alpha}{k} \int_0^1 F(1 - F)^k \, dF - \\
&\quad - \frac{\alpha}{k} [F]_0^1 + \frac{\alpha}{k} \int_0^1 (1 - F)^k \, dF \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= \frac{20\alpha}{k} \left[F^3 \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 - \frac{60\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 F^2(1 - F)^{k+1} \, dF - \\
&\quad - \frac{30\alpha}{k} \left[F^2 \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 + \frac{60\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 F(1 - F)^{k+1} \, dF + \\
&\quad + \frac{12\alpha}{k} \left[F \frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 - \frac{12\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 (1 - F)^{k+1} \, dF - \\
&\quad - \frac{\alpha}{k} \left[\frac{(1 - F)^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-60\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 F^2(1-F)^{k+1} dF + \frac{60\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 F(1-F)^{k+1} dF - \\
&\quad - \frac{12\alpha}{k(k+1)} \int_0^1 (1-F)^{k+1} dF + \frac{\alpha}{k(k+1)} \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= \frac{60\alpha}{k(k+1)} \left[F^2 \frac{(1-F)^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 - \frac{120\alpha}{k(k+1)(k+2)} \int_0^1 F(1-F)^{k+2} dF - \\
&\quad - \frac{60\alpha}{k(k+1)} \left[F \frac{(1-F)^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 + \frac{60\alpha}{k(k+1)(k+2)} \int_0^1 (1-F)^{k+2} dF + \\
&\quad + \frac{12\alpha}{k(k+1)} \left[\frac{(1-F)^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 + \frac{\alpha}{k(k+1)} = \\
&= \frac{-120\alpha}{k(k+1)(k+2)} \int_0^1 F(1-F)^{k+2} dF + \frac{60\alpha}{k(k+1)(k+2)} \int_0^1 (1-F)^{k+2} dF - \\
&\quad - \frac{12\alpha}{k(k+1)(k+2)} + \frac{\alpha}{k(k+1)} \stackrel{\text{p.p.}}{=} \\
&= \frac{120\alpha}{k(k+1)(k+2)} \left[F \frac{(1-F)^{k+3}}{k+3} \right]_0^1 - \\
&\quad - \frac{120\alpha}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \int_0^1 (1-F)^{k+3} dF - \\
&\quad - \frac{60\alpha}{k(k+1)(k+2)} \left[\frac{(1-F)^{k+3}}{k+3} \right]_0^1 - \frac{12\alpha}{k(k+1)(k+2)} + \frac{\alpha}{k(k+1)} = \\
&= \frac{120\alpha}{k(k+1)(k+2)(k+3)} \left[\frac{(1-F)^{k+4}}{k+4} \right]_0^1 + \frac{60\alpha}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \\
&\quad - \frac{12\alpha}{k(k+1)(k+2)} + \frac{\alpha}{k(k+1)} = \\
&= \frac{\alpha(k-1)(k-2)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \tag{3.53}
\end{aligned}$$

Čtvrtý L-momentový poměr:

$$\begin{aligned}
\tau_4 &= \lambda_4/\lambda_2 = \frac{\alpha(k-1)(k-2)}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{\alpha} = \\
&= \frac{(k-1)(k-2)}{(k+3)(k+4)} \tag{3.54}
\end{aligned}$$

Tabulka 3: L-momenty a L-momentové poměry vybraných pravděpodobnostních rozdělení

Rozdělení	Kvantilová funkce	L-momenty a L-momentové poměry
Rovnoměrné	$x(F) = \alpha + (\beta - \alpha)F$	$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ $\lambda_2 = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)$ $\tau_3 = 0$ $\tau_4 = 0$
Exponenciální	$x(F) = \xi - \alpha \ln(1 - F)$	$\lambda_1 = \xi + \alpha$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha$ $\tau_3 = \frac{1}{3}$ $\tau_4 = \frac{1}{6}$
Normální	nemá explicitní tvar	$\lambda_1 = \mu$ $\lambda_2 = \pi^{-\frac{1}{2}}\sigma$ $\tau_3 = 0$ $\tau_4 = 0.1244$
Pareto	$x(F) = \beta(1 - F)^{-\frac{1}{\alpha}}$	$\lambda_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$ $\lambda_2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$ $\tau_3 = \frac{\alpha+1}{3\alpha-1}$ $\tau_4 = \frac{2(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(3\alpha-1)(4\alpha-1)}$
Logistické	$x(F) = \xi + \alpha \ln\left(\frac{1-F}{F}\right)$	$\lambda_1 = \xi$ $\lambda_2 = \alpha$ $\tau_3 = 0$ $\tau_4 = \frac{1}{6}$
Zobecněné Pareto	$x(F) = \xi + \alpha \frac{1-(1-F)^k}{k}$	$\lambda_1 = \xi + \frac{\alpha}{k+1}$ $\lambda_2 = \frac{\alpha}{(k+1)(k+2)}$ $\tau_3 = \frac{1-k}{3+k}$ $\tau_4 = \frac{(k-1)(k-2)}{(k+3)(k+4)}$

4 Odhad parametrů pravděpodobnostních rozdělení

V této části uvedeme aplikaci L-momentů. Pomocí L-momentů je možné odhadnout parametry pravděpodobnostního rozdělení. K odhadu parametrů pravděpodobnostního rozdělení se nejčastěji používá metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda. Vzhledem k analogii L-momentů ke konvenčním momentům lze parametry pravděpodobnostních rozdělení náhodné veličiny X odhadnout pomocí tzv. L-momentové metody.

Než přistoupíme k odhadu parametrů vybraných pravděpodobnostních rozdělení, připomeneme základní principy metody maximální věrohodnosti a momentové metody. Následně zavedeme L-momentovou metodu. Jak uvidíme dále, L-momentová metoda se od klasické momentové metody nijak výrazně neliší.

4.1 Metody odhadu parametrů

Mějme náhodnou veličinu X s hustotou $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, přičemž $\theta_i, i = 1, 2, \dots, k$, jsou neznámé parametry pravděpodobnostního rozdělení, a nechť X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výběr. Na základě náhodného výběru X_1, X_2, \dots, X_n je třeba co nejlépe odhadnout parametry $\theta_i, i = 1, 2, \dots, k$. V našem případě odhadujeme parametr jednou hodnotou, jedná se tedy o bodový odhad. Najít **bodový odhad** θ znamená najít funkci náhodných veličin X_1, X_2, \dots, X_n , která se blíží skutečné hodnotě parametru θ . Odhad $\hat{\theta}$ se nazývá **nestraný odhad**, jestliže platí $E \hat{\theta} = \theta$. Označme pro každé n $\theta_n = g_n(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Řekneme, že odhad $\hat{\theta}$ je **konzistentní**, jestliže posloupnost $\hat{\theta}_n$ konverguje k θ podle pravděpodobnosti. Dále je vhodné zavést **střední kvadratickou chybu** odhadu $\hat{\theta}$ parametru θ vztahem

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]. \quad (4.1)$$

Střední kvadratická chyba vyjadřuje rozdíl mezi odhadnutou hodnotou $\hat{\theta}$ parametru θ a skutečnou hodnotou parametru θ . Čím nižší je střední kvadratická chyba $\text{MSE}(\hat{\theta})$, tím přesnější je odhad $\hat{\theta}$ parametru θ .

4.1.1 Metoda maximální věrohodnosti

Princip metody maximální věrohodnosti je zpracován podle literatury [1] a [9].

Mějme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z rozdělení, které má hustotu $f(x; \theta)$, kde θ je jednorozměrný parametr. Vzhledem k tomu, že jsou náhodné veličiny X_1, X_2, \dots, X_n nezávislé, je sdružená hustota náhodného výběru X_1, X_2, \dots, X_n dána výrazem

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta). \quad (4.2)$$

Tuto funkci nazveme **věrohodnostní funkcí** a označíme ji $\ell(\theta)$. **Maximálně věrohodný odhad** parametru θ je hodnota $\hat{\theta}$, která maximalizuje věrohodnostní funkci $\ell(\theta)$. Dále zavedeme logaritmus věrohodnostní funkce

$$L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i; \theta). \quad (4.3)$$

Funkce $L(\theta)$ se přirozeně nazývá **logaritmická věrohodnostní funkce**.

Anděl [1] uvádí větu, která ve stručnosti říká, že maximálně věrohodný odhad $\hat{\theta}$ parametru θ lze za určitých podmínek nalézt jako řešení rovnice

$$\frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (4.4)$$

Tímto způsobem získaný maximálně věrohodný odhad je konzistentní.

4.1.2 Momentová metoda

Princip momentové metody je zpracován podle literatury [8].

Nechť X je náhodná veličina s hustotou $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, kde $\theta_i, i = 1, 2, \dots, k$, jsou parametry pravděpodobnostního rozdělení, a X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výběr. Dále nechť $\mu'_r = E X^r$ je r -tý obecný moment a označme $m'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^r$ jako r -tý výběrový moment. Parametr $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ odhadneme momentovou metodou vyřešením soustavy rovnic

$$\mu'_r = m'_r, \quad r = 1, \dots, k. \quad (4.5)$$

Řešení soustavy (4.5) se nazývá **momentový odhad**.

4.1.3 L-momentová metoda

Nechť X je náhodná veličina s hustotou $f(x; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$, kde $\theta_i, i = 1, 2, \dots, k$, jsou parametry pravděpodobnostního rozdělení, a X_1, X_2, \dots, X_n je náhodný výběr. Dále nechť λ_r je r -tý teoretický L-moment, l_r je r -tý výběrový L-moment, τ_r je r -tý teoretický L-momentový poměr a t_r je r -tý výběrový L-momentový poměr. L-momentová metoda spočívá v porovnání prvních k teoretických L-momentů $\lambda_r = \lambda_r(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ (resp. teoretických L-momentových poměrů τ_r) s odpovídajícími výběrovými L-momenty l_r (resp. výběrovými L-momentovými poměry t_r). Odhad parametru $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ tedy získáme vyřešením soustavy rovnic

$$\lambda_r = l_r, \quad r = 1, 2, \quad \text{resp. } \tau_r = t_r, \quad r = 3, \dots, k. \quad (4.6)$$

4.2 Odhad parametrů vybraných pravděpodobnostních rozdělení L-momentovou metodou

V předchozí části jsme připomněli, jak můžeme odhadnout neznámý parametr. Nyní se budeme zabývat odhadem parametrů vybraných spojitých pravděpodobnostních rozdělení L-momentovou metodou.

Vraťme se k již vypočteným hodnotám $\lambda_1, \lambda_2, \tau_3$ a τ_4 jednotlivých rozdělení z kapitoly 3. Dosažené výsledky použijeme k odhadu parametrů L-momentovou metodou dosazením do vztahu (4.6). Námi zvolená rozdělení mají 2 až 3 parametry, hledané odhady parametrů tedy získáme jako řešení jednoduché soustavy 2 nejvýše 3 rovnic.

4.2.1 Rovnoměrné rozdělení $R(\alpha, \beta)$

Uvažujme náhodný výběr o rozsahu n z rovnoměrného rozdělení $R(\alpha, \beta)$, ve kterém odhadujeme parametry α, β . Jelikož odhadujeme dva parametry, porovnáváme první dva teoretické L-momenty s výběrovými L-momenty. Použijeme-li výsledků (3.4) a (3.5) a vztahu (4.6), máme

$$l_1 = \lambda_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

$$l_2 = \lambda_2 = \frac{1}{6}(\beta - \alpha).$$

Řešení této soustavy vede k odhadu parametrů α, β . Snadno zjistíme, že

$$\hat{\alpha} = l_1 - 3l_2,$$

$$\hat{\beta} = l_1 + 3l_2.$$

Poznámka 3. Zcela analogický postup vede k odhadu parametrů dalších pravděpodobnostních rozdělení, proto slovní komentář vynecháváme a uvádíme jen soustavu rovnic, jejímž vyřešením získáme odhady parametrů.

4.2.2 Exponenciální rozdělení $\text{Exp}(\xi, \alpha)$

2 parametry: ξ, α

L-momenty a L-momentové poměry: $\lambda_1 = \xi + \alpha$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha$$

$$\tau_3 = \frac{1}{3}$$

$$\tau_4 = \frac{1}{6}$$

L-momentová metoda:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = \lambda_1 = \xi + \alpha \\ l_2 = \lambda_2 = \frac{1}{2}\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{odhad parametrů: } \begin{array}{l} \hat{\alpha} = 2l_2 \\ \hat{\xi} = l_1 - \hat{\alpha} \end{array}$$

4.2.3 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

2 parametry: μ, σ^2

L-momenty a L-momentové poměry: $\lambda_1 = \mu$

$$\lambda_2 = 0.5642 \sigma \approx \pi^{-\frac{1}{2}} \sigma$$

$$\tau_3 = 0$$

$$\tau_4 = 0.1244$$

L-momentová metoda:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = \lambda_1 = \mu \\ l_2 = \lambda_2 = \pi^{-\frac{1}{2}} \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \text{odhad parametrů: } \begin{array}{l} \hat{\mu} = l_1 \\ \hat{\sigma} = \sqrt{\pi} l_2 \end{array}$$

4.2.4 Paretovo rozdělení $\text{Par}(\alpha, \beta)$

2 parametry: α, β

L-momenty a L-momentové poměry: $\lambda_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1}$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)}$$

$$\tau_3 = \frac{\alpha+1}{3\alpha-1}$$

$$\tau_4 = \frac{2(\alpha+1)(2\alpha+1)}{(3\alpha-1)(4\alpha-1)}$$

L-momentová metoda:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = \lambda_1 = \frac{\alpha\beta}{\alpha-1} \\ l_2 = \lambda_2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)(2\alpha-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{odhad parametrů: } \begin{array}{l} \hat{\alpha} = \frac{l_1 + l_2}{2l_2} \\ \hat{\beta} = \frac{l_1(\hat{\alpha}-1)}{\hat{\alpha}} \end{array}$$

4.2.5 Logistické rozdělení $\text{Logi}(\xi, \alpha)$

2 parametry: ξ, α

L-momenty a L-momentové poměry: $\lambda_1 = \xi$

$$\lambda_2 = \alpha$$

$$\tau_3 = 0$$

$$\tau_4 = \frac{1}{6}$$

L-momentová metoda:

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = \lambda_1 = \xi \\ l_2 = \lambda_2 = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \text{odhad parametrů: } \begin{array}{l} \hat{\xi} = l_1 \\ \hat{\alpha} = l_2 \end{array}$$

4.2.6 Zobecněné Paretovo rozdělení $\text{GPD}(\xi, \alpha, k)$

3 parametry: ξ, α, k

L-momenty a L-momentové poměry: $\lambda_1 = \xi + \frac{\alpha}{k+1}$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{(k+1)(k+2)}$$

$$\tau_3 = \frac{1-k}{3+k}$$

$$\tau_4 = \frac{(k-1)(k-2)}{(k+3)(k+4)}$$

L-momentová metoda:

$$\left. \begin{aligned} l_1 &= \lambda_1 = \xi + \frac{\alpha}{k+1} \\ l_2 &= \lambda_2 = \frac{\alpha}{(k+1)(k+2)} \\ t_3 &= \tau_3 = \frac{1-k}{3+k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{odhad parametrů: } \begin{aligned} \hat{k} &= \frac{1-3\tau_3}{1+\tau_3} \\ \hat{\alpha} &= l_2(\hat{k}+1)(\hat{k}+2) \\ \hat{\xi} &= l_1 - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}+1} \end{aligned}$$

Tabulka 4: Odhady parametrů vybraných pravděpodobnostních rozdělení

Rozdělení	Odhady parametrů
Rovnoměrné	$\hat{\lambda} = l_1 - 3l_2, \hat{\beta} = l_1 + 3l_2$
Exponenciální	$\hat{\lambda} = 2l_2, \hat{\xi} = l_1 - \hat{\alpha}$
Normální	$\hat{\mu} = l_1, \hat{\sigma} = \sqrt{\pi}l_2$
Pareto	$\hat{\alpha} = \frac{l_1+l_2}{2l_2}, \hat{\beta} = \frac{l_1(\hat{\alpha}-1)}{\hat{\alpha}}$
Logistické	$\hat{\xi} = l_1, \hat{\alpha} = l_2$
Zobecněné Pareto	$\hat{k} = \frac{1-3\tau_3}{1+\tau_3}, \hat{\alpha} = l_2(\hat{k}+1)(\hat{k}+2), \hat{\xi} = l_1 - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}+1}$

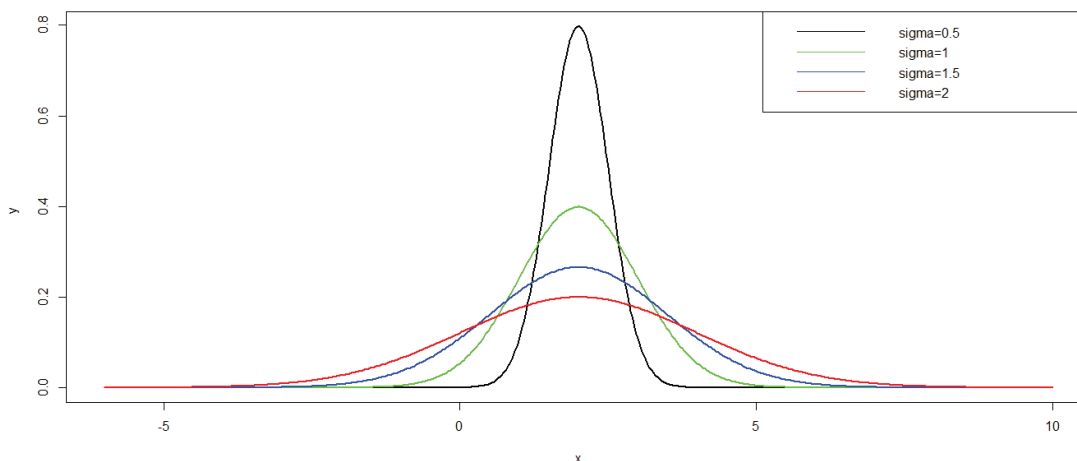
5 Malá simulační studie odhadu parametrů v programu R

Cílem této kapitoly je porovnat odhady parametrů získané L-momentovou metodou (LMO) s odhady získané běžně používanými metodami jako jsou metoda maximální věrohodnosti (MLE) a momentová metoda (MOM). Vzhledem k tomu, že data generujeme z rozdělení se známými parametry, lze rozhodnout, která metoda odhadu parametrů dává pro daný typ rozdělení nejpřesnější odhady a je tudíž nejvhodnější.

K simulaci použijeme statistický program R. Speciálně k odhadu parametrů L-momentovou metodou použijeme balík `lmomco`. Balík `lmomco` shrnuje teorii L-momentů a obsahuje funkce jako výpočet výběrových L-momentů a L-momentových poměrů, odhad parametrů L-momentovou metodou, výpočet výběrových TL-momentů a TL-momentových poměrů ze zadaných dat atd. pro různá pravděpodobnostní rozdělení. Autorem balíku je William H. Asquith.

5.1 Normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$

Náhodná data o velikosti n z normálního rozdělení s parametry μ a σ^2 vygenerujeme užitím funkce `rnorm()`. Budeme generovat náhodná data o velikosti $n = 10, 100, 1\,000$. Pro parametr polohy jsme zvolili jedinou hodnotu $\mu = 2$, pro parametr rozptylu uvažujeme čtyři hodnoty $\sigma = 0.5, 1, 1.5, 2$. Pro každou kombinaci velikosti a parametrů provedeme simulaci 1 000krát. Na Obrázku 4 jsou znázorněny hustoty normálního rozdělení pro různé kombinace parametrů.



Obrázek 4: Hustota normálního rozdělení pro různé kombinace parametrů

Nejprve provedeme simulaci pro L-momentovou metodu. Balík `lmomco` nabízí funkci `lmoms()`, která vypočítá výběrové L-momenty a L-momentové poměry a vypíše je jako vektor pod názvy `lambdas` a `ratios`. Funkce, která odhadne parametry μ a σ normálního rozdělení ze zadaných L-momentů, se nazývá `parnor()`. Tyto hodnoty jsou uloženy do vektoru `para`. Argument `checklmom` funkce `parnor()` kontroluje, zda-li nejsou L-momenty mimo možné hodnoty.

```
> n <- 10
> mu <- 2
> sigma <- 0.5
> m <- 1000
> M <- matrix(0, m, 2)
> D <- matrix(0, m, n)
> for (i in 1:m) {
+ fake.dat <- rnorm(n, mean=mu, sd=sigma)
+ D[i, ] <- fake.dat
+ lmr <- lmoms(fake.dat)
+ PARnor <- parnor(lmr, checklmom=FALSE)$para
+ M[i, ] <- PARnor
+ }
```

Je známo, že maximálně věrohodné odhady parametrů μ a σ normálního rozdělení jsou tvaru

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad (5.1)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (5.2)$$

Vygenerovaná data dosadíme do vztahů (5.1), (5.2) a odhadneme tak parametry μ a σ .

```

> M <- matrix(0, m, 1)
> for (i in 1:m) {
+ M[i, ] <- mean(D[i, ])
+ }
> S <- matrix(0, m, 1)
> for (i in 1:m) {
+ S[i, ] <- sqrt((1/n)*sum((D[i, ]-mean(D[i, ]))^2))
+ }

```

Zbývá uvést momentové odhady parametrů μ a σ . Momentová metoda odhadu parametrů spočívá v řešení soustavy rovnic (4.5). V případě normálního rozdělení platí

$$\mu'_1 = \mu, \quad \text{var } X = \sigma^2. \quad (5.3)$$

Použijeme-li (5.3) a (1.4), pak má soustava rovnic (4.5) tvar

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (5.4)$$

$$\sigma^2 + \mu^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (5.5)$$

a snadno dostaneme

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad (5.6)$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2}. \quad (5.7)$$

Vygenerovaná data dosadíme do vztahů (5.6), (5.7) a odhadneme tak parametry μ a σ .

```

> M <- matrix(0, m, 1)
> for (i in 1:m) {
+ M[i, ] <- mean(D[i, ])
+ }

```

```

> S <- matrix(0, m, 1)
> for (i in 1:m) {
+ S[i, ] <- sqrt((1/n)*sum((D[i, ])^2-(mean(D[i, ]))^2)
+ }

```

Tabulka 5 shrnuje výsledky provedené simulace. Pro každou kombinaci n , μ , σ a typ metody jsou v tabulce uvedeny dvě hodnoty: průměr a průměrná střední kvadratická chyba odhadu (uvedena pod průměrnou hodnotou v závorce) přes všech 1 000 simulací. Na základě průměrné střední kvadratické chyby odhadu (4.1) odvozujeme závěry, která metoda dává nejpřesnější odhad parametru.

Tabulka 5: Výsledky simulace normálního rozdělení

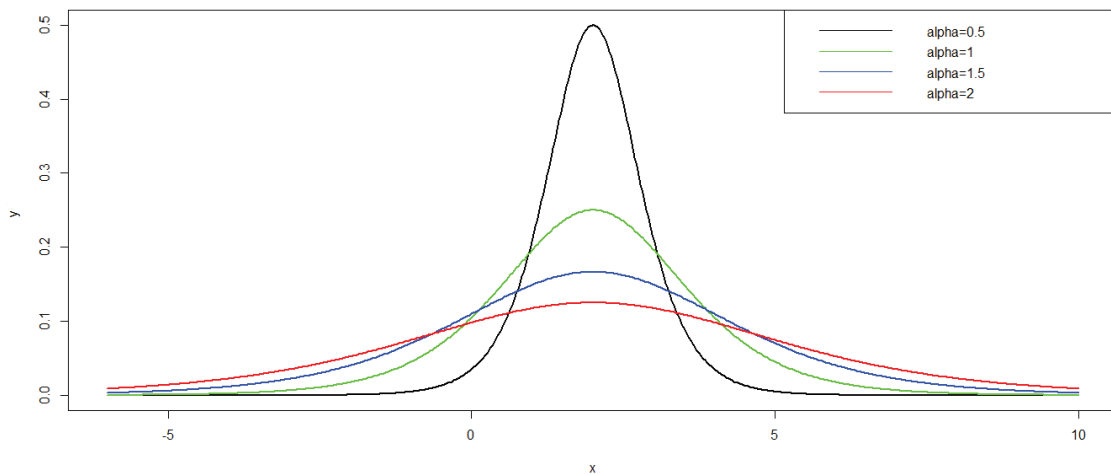
		$n = 10$			$n = 100$			$n = 1\,000$		
		LMO	MOM	MLE	LMO	MOM	MLE	LMO	MOM	MLE
$\mu = 2$	$\hat{\mu}$	1.9998	1.9998	1.9998	1.9991	1.9991	1.9991	2.0003	2.0003	2.0003
		(0.0271)	(0.0271)	(0.0271)	(0.0026)	(0.0026)	(0.0026)	(0.0003)	(0.0003)	(0.0003)
$\sigma = 0.5$	$\hat{\sigma}$	0.4923	0.4551	0.4551	0.4988	0.4949	0.4949	0.5006	0.5002	0.5002
		(0.0144)	(0.0139)	(0.0139)	(0.0013)	(0.0013)	(0.0013)	(0.0001)	(0.0001)	(0.0001)
$\mu = 2$	$\hat{\mu}$	2.0058	2.0058	2.0058	1.9931	1.9931	1.9931	1.9983	1.9983	1.9983
		(0.0982)	(0.0982)	(0.0982)	(0.0100)	(0.0100)	(0.0100)	(0.0011)	(0.0011)	(0.0011)
$\sigma = 1$	$\hat{\sigma}$	0.9881	0.9114	0.9114	1.0006	0.9929	0.9929	1.0005	0.9996	0.9996
		(0.0561)	(0.0542)	(0.0542)	(0.0053)	(0.0051)	(0.0051)	(0.0005)	(0.0005)	(0.0005)
$\mu = 2$	$\hat{\mu}$	1.9878	1.9878	1.9878	2.0047	2.0047	2.0047	1.9998	1.9998	1.9998
		(0.2198)	(0.2198)	(0.2198)	(0.0219)	(0.0219)	(0.0219)	(0.0023)	(0.0023)	(0.0023)
$\sigma = 1.5$	$\hat{\sigma}$	1.4950	1.3782	1.3782	1.5016	1.4902	1.4902	1.5000	1.4989	1.4989
		(0.1353)	(0.1271)	(0.1271)	(0.0120)	(0.0116)	(0.0116)	(0.0011)	(0.0011)	(0.0011)
$\mu = 2$	$\hat{\mu}$	1.9949	1.9949	1.9949	2.0041	2.0041	2.0041	1.9994	1.9994	1.9994
		(0.3680)	(0.3680)	(0.3680)	(0.0394)	(0.0394)	(0.0394)	(0.0042)	(0.0042)	(0.0042)
$\sigma = 2$	$\hat{\sigma}$	2.0300	1.8730	1.8730	1.9958	1.9808	1.9808	2.0023	2.0011	2.0011
		(0.2264)	(0.2038)	(0.2038)	(0.0207)	(0.0203)	(0.0203)	(0.0020)	(0.0019)	(0.0019)

Z Tabulky 5 ihned vidíme, že momentová metoda a metoda maximální věrohodnosti dávají totožné odhady parametrů. Ať zvolíme jakoukoliv metodu, parametr μ je ve všech třech případech roven výběrovému průměru. Při odhadu parametru polohy μ tedy nezáleží na volbě metody. Maximálně věrohodný (resp. momentový)

odhad parametru rozptylu σ je doporučen pro data malých velikostí ($n = 10$). V případě většího rozsahu dat ($n = 100, n = 1\,000$) dávají všechny tři metody podobně přesné odhady parametru σ . L-momentová metoda je tedy pro odhad parametrů normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$ z většího rozsahu dat vhodnou alternativou k běžně používaným metodám.

5.2 Logistické rozdělení $\text{Logi}(\xi, \alpha)$

Náhodná data o velikosti $n = 10, 100, 1000$ z logistického rozdělení s parametry ξ a α vygenerujeme pomocí funkce `rlogis()`. Parametr polohy $\xi = 2$ ponecháme pevný a budeme ho kombinovat se čtyřmi hodnotami parametru rozptylu $\alpha = 0.5, 1, 1.5, 2$. Pro každou kombinaci velikosti a parametrů provedeme simulaci 1 000krát. Obrázek 5 znázorňuje hustotu logistického rozdělení s různými kombinacemi parametrů.



Obrázek 5: Hustota logistického rozdělení pro různé kombinace parametrů

Začneme se simulací pro L-momentovou metodu. Jak již bylo uvedeno, odhady parametrů ξ a α jsou tvaru

$$\hat{\xi} = l_1, \quad \hat{\alpha} = l_2.$$

K odhadu parametrů stačí vypočítat první dva výběrové L-momenty pomocí funkce `lmoms()`: první výběrový L-moment je odhadem parametru ξ , druhý výběrový L-moment je odhadem parametru α . Obejdeme se tedy bez nějaké speciální funkce balíku `lmomco`, která by parametry odhadla. Z předchozí části víme, že se výběrové L-momenty vypíší pod názvem `lambdas`. Navíc k funkci `lmoms()` přidáme kromě

dat i argument `nmom=2`, jelikož k odhadu potřebujeme pouze první dva výběrové L-momenty (tj. argument `nmom` udává počet výběrových L-momentů, které funkce vypočítá).

```
> n <- 10
> xi <- 2
> alpha <- 0.5
> m <- 1000
> M <- matrix(0, m, 2)
> D <- matrix(0, m, n)
> for (i in 1:m) {
+ fake.dat <- rnorm(n, location=xi, scale=alpha)
+ D[i, ] <- fake.dat
+ lmr <- lmoms(fake.dat, nmom=2)$lambdas
+ M[i, ] <- lmr
+ }
```

Pro logistické rozdělení platí

$$\mu'_1 = \xi, \quad \text{var } X = \frac{\pi^2}{3} \alpha^2. \quad (5.8)$$

Momentová metoda odhadu parametrů logistického rozdělení pak spočívá v řešení soustavy rovnic

$$\xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (5.9)$$

$$\frac{\pi^2}{3} \alpha^2 + \xi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (5.10)$$

Výpočtem se dostane, že

$$\hat{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \quad (5.11)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\pi} \sqrt{3 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right]} = \frac{1}{\pi} \sqrt{3 \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 \right]}. \quad (5.12)$$

Dosazením vygenerovaných dat do výrazů (5.11) a (5.12) dostaneme odhady parametrů ξ a α .

```
> M <- matrix(0, m, 1)
> for (i in 1:m) {
+ M[i, ] <- mean(D[i, ])
+ }
> S <- matrix(0, m, 1)
> for (i in 1:m) {
+ S[i, ] <- (1/pi)*sqrt(3*((1/n)*sum((D[i, ])^2)-(mean(D[i, ]))^2))
+ }
```

Pro odhad parametrů logistického rozdělení metodou maximální věrohodnosti použijeme funkci `fitdistr()` balíku **MASS**. Tato funkce odhaduje metodou maximální věrohodnosti parametry základních jednorozměrných rozdělení, např. binomické, normální, exponenciální atd. Argumentem funkce je proto kromě dat i označení pravděpodobnostního rozdělení, jehož parametry chceme odhadnout. Parametry jsou uloženy do vektoru `estimate`.

```
> S <- matrix(0, m, 2)
> for (i in 1:m) {
+ S[i, ] <- fitdistr(D[i, ], "logistic")$estimate
+ }
```

Tabulka 6 shrnuje výsledky provedené simulace. Pro každou kombinaci n , ξ , α a typ metody jsou v tabulce uvedeny dvě hodnoty: průměr a průměrná střední kvadratická chyba odhadu (uvedena pod průměrnou hodnotou v závorce) přes všech 1 000 simulací. Na základě průměrné střední kvadratické chyby odhadu (4.1) odvozujeme závěry, která metoda dává nejpřesnější odhad parametrů ξ a α .

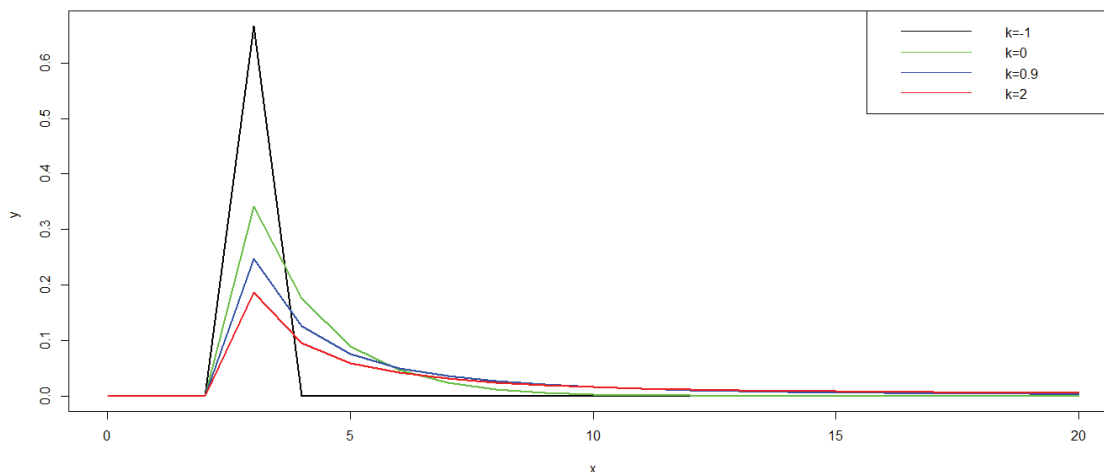
Tabulka 6: Výsledky simulace logistického rozdělení

		$n = 10$			$n = 100$			$n = 1\ 000$		
		LMO	MOM	MLE	LMO	MOM	MLE	LMO	MOM	MLE
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	1.9961 (0.0860)	1.9961 (0.0860)	1.9971 (0.0798)	2.0009 (0.0080)	2.0009 (0.0080)	2.0005 (0.0072)	2.0014 (0.0008)	2.0014 (0.0008)	2.0012 (0.0007)
$\alpha = 0.5$	$\hat{\alpha}$	0.5071 (0.0201)	0.4629 (0.0192)	0.4770 (0.0181)	0.4977 (0.0019)	0.4931 (0.0021)	0.4948 (0.0018)	0.5002 (0.0002)	0.4996 (0.0002)	0.5000 (0.0002)
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	2.0302 (0.3370)	2.0302 (0.3370)	2.0255 (0.3091)	2.0102 (0.0320)	2.0102 (0.0320)	2.0089 (0.0296)	2.0001 (0.0034)	2.0001 (0.0034)	2.0004 (0.0032)
$\alpha = 1$	$\hat{\alpha}$	0.9967 (0.0788)	0.9078 (0.0773)	0.9388 (0.0726)	1.0037 (0.0071)	0.9961 (0.0078)	0.9973 (0.0069)	0.9988 (0.0008)	0.9979 (0.0009)	0.9982 (0.0007)
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	2.0300 (0.7238)	2.0300 (0.7238)	2.0292 (0.6684)	2.0056 (0.0755)	2.0056 (0.0755)	2.0078 (0.0684)	1.9979 (0.0072)	1.9979 (0.0072)	1.9977 (0.0066)
$\alpha = 1.5$	$\hat{\alpha}$	1.5015 (0.1708)	1.3677 (0.1684)	1.4138 (0.1568)	1.4980 (0.0156)	1.4840 (0.0172)	1.4897 (0.0154)	1.5015 (0.0016)	1.5000 (0.0018)	1.5007 (0.0016)
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	2.0931 (1.3140)	2.0931 (1.3140)	2.0826 (1.2069)	2.0102 (0.1350)	2.0102 (0.1350)	2.0091 (0.1216)	1.9995 (0.0132)	1.9995 (0.0132)	1.9992 (0.0120)
$\alpha = 2$	$\hat{\alpha}$	1.9814 (0.2968)	1.8144 (0.2950)	1.8618 (0.2794)	2.0001 (0.0285)	1.9823 (0.0315)	1.9887 (0.0281)	1.9964 (0.0029)	1.9944 (0.0033)	1.9953 (0.0029)

Metoda maximální věrohodnosti je jednoznačně doporučena pro odhady parametrů ξ a α z dat jakéhokoliv rozsahu. V případě odhadu parametru α z dat většího rozsahu ($n = 100$, $n = 1\ 000$) je přijatelnou metodou také L-momentová metoda, neboť i ta dává vyhovující odhady. I přesto, že momentová metoda dává pro odhad parametru α z rozsahu dat $n = 1\ 000$ o něco málo horší odhady než metoda maximální věrohodnosti a L-momentová metoda, mohli bychom i ji považovat za přijatelnou.

5.3 Zobecněné Paretovo rozdělení $\text{GPD}(\xi, \alpha, k)$

Náhodná data ze zobecněného Paretova rozdělení o velikosti $n = 10, 100, 1\ 000$ vygenerujeme užitím funkce `rgpd()`. Pro parametr polohy ξ i parametr rozptylu α jsme zvolili pouze jednu hodnotu: $\xi = 2$, $\alpha = 1.5$. Pro parametr polohy k uvažujeme čtyři hodnoty $k = -1, 0, 0.9, 2$. Na Obrázku 6 jsou znázorněny hustoty zobecněného Paretova rozdělení čtyř kombinací parametrů ξ , α a k .



Obrázek 6: Hustota zobecněného Paretova rozdělení pro různé kombinace parametrů

Nejdříve popíšeme odhad parametrů ξ, α a k zobecněného Paretova rozdělení L-momentovou metodou. Stejně jako v případě normálního rozdělení nabízí balík `lmomco` funkci `pargpa()`, která odhadne hledané parametry.

```
> n <- 10
> xi <- 2
> alpha <- 1.5
> k <- -0.25
> m <- 1000
> M <- matrix(0, m, 3)
> D <- matrix(0, m, n)
> for (i in 1:1000) {
+   fake.dat <- rgpd(n, loc=xi, scale=alpha, shape=k)
+   D[i, ] <- fake.dat
+   lmr <- lmoms(fake.dat)
+   PARgpa <- pargpa(lmr, checklmom=FALSE)$para
+   M[i, ] <- PARgpa
+ }
```

Pro zobecněné Paretovo rozdělení nelze narozdíl od předchozích typů rozdělení snadno vyřešit příslušnou soustavu (4.5) a získat tak momentové odhady parametrů

ξ, α a k . Proto v tomto případě použijeme opět funkci programu R. Prostřednictvím funkce `fitgpd()` s argumentem "moments" z balíku POT odhadneme parametry zobecněného Paretova rozdělení momentovou metodou. Analogicky, změnou argumentu "moments" na "mle" získáme odhady parametrů metodou maximální věrohodnosti. U této funkce je potřeba určit tzv. `threshold`, což je prahová hodnota. V našem případě zadáváme odhad parametru polohy ξ získaný L-momentovou metodou. Odhadované parametry jsou uloženy do vektoru `param`.

```
> S <- matrix(0, m, 2)
> for (i in 1:m) {
+ S[i, ] <- fitgpd(D[i, ], threshold=1.9614, "moments")$param
+ }

> S <- matrix(0, m, 2)
> for (i in 1:m) {
+ S[i, ] <- fitgpd(D[i, ], threshold=1.9614, "mle")$param
+ }
```

Tabulka 7 shrnuje výsledky provedené simulace. Pro každou kombinaci n , ξ , α , k a typ metody jsou v tabulce uvedeny dvě hodnoty: průměr a průměrná střední kvadratická chyba odhadu (uvedena pod průměrnou hodnotou v závorce) přes všech 1 000 simulací. Na základě průměrné střední kvadratické chyby odhadu (4.1) odvozujeme závěry, která metoda dává nejpresnější odhad parametru.

Z hodnot uvedených v Tabulce 7 je zřejmé, že není možné určit jednu metodu, která by dávala dobré odhady pro všechny tři parametry. Začneme s odhadem parametru polohy ξ . L-momentová metoda je z použitých tří metod jediná, pomocí níž jednoduše získáme odhad parametru ξ . V případě metody maximální věrohodnosti a momentové metody je velice komplikované odhadnout parametr ξ , proto považujeme L-momentovou metodu pro odhad parametru ξ za výhodnou. Nyní se budeme zabývat odhadem parametru rozptylu α a parametru tvaru k . Metoda maximální věrohodnosti je vhodná v případě, že parametr tvaru k je záporný a rozsah dat n je nižší ($n = 10, n = 100$), nebo v případě, že parametr tvaru k je kladný a rozsah dat n je velký ($n = 1\,000$). Jestliže parametr tvaru k je blízký nule a rozsah

dat n je libovolný, pak je doporučen momentový odhad parametrů α a k . Naopak L-momentový odhad parametrů α a k zvolíme, pokud je k záporné a rozsah dat n je velký ($n = 1\,000$), nebo k je kladné a blíží se k jedné a rozsah dat n je spíše nižší ($n = 10, n = 100$).

Úmyslně byla pro parametr tvaru k použita hodnota $k = 2$, ačkoliv je známo, že pro $k \geq 1$ neexistuje střední hodnota, a podle Věty 1 tedy neexistují ani L-momenty. Tento fakt se při pohledu na spodní část Tabulky 7 potvrdil: odhady parametrů zobecněného Paretova rozdělení jsou pro $k \geq 1$ nevyhovující.

Tabulka 7: Výsledky simulace zobecněného Paretova rozdělení

		$n = 10$			$n = 100$			$n = 1\,000$		
		LMO	MOM	MLE	LMO	MOM	MLE	LMO	MOM	MLE
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	1.9657 (0.0346)	1.9657 (0.0346)	1.9657 (0.0346)	2.0008 (0.0019)	2.0008 (0.0019)	2.0008 (0.0019)	2.0000 (0.0002)	2.0000 (0.0002)	2.0000 (0.0002)
$\alpha = 1.5$	$\hat{\alpha}$	1.8251 (1.4584)	1.9950 (1.7691)	1.5700 (0.2267)	1.5073 (0.0541)	1.5228 (0.0608)	1.4296 (0.0326)	1.5004 (0.0047)	1.5020 (0.0058)	1.3631 (0.0361)
$k = -1$	\hat{k}	-1.1458 (0.6022)	-1.4208 (1.4223)	-1.1194 (0.1214)	-1.0025 (0.0307)	-1.0226 (0.0514)	-0.9617 (0.0140)	-1.0004 (0.0027)	-1.0023 (0.0050)	-0.9092 (0.0160)
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	1.9710 (0.0589)	1.9710 (0.0589)	1.9710 (0.0589)	1.9971 (0.0032)	1.9971 (0.0032)	1.9971 (0.0032)	2.0041 (0.0030)	2.0041 (0.0030)	2.0041 (0.0030)
$\alpha = 1.5$	$\hat{\alpha}$	1.7335 (1.1564)	1.8902 (0.8261)	2.3142 (2.0860)	1.5147 (0.0619)	1.5387 (0.0477)	1.5479 (0.0548)	1.5235 (0.0603)	1.5380 (0.0475)	1.5392 (0.0536)
$k = 0$	\hat{k}	-0.1106 (0.2248)	-0.2420 (0.2221)	-0.4327 (0.4722)	0.0083 (0.0133)	-0.0255 (0.0108)	-0.0308 (0.0138)	-0.0224 (0.0134)	-0.0303 (0.0113)	-0.0303 (0.0139)
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	1.6558 (1.5654)	1.6558 (1.5654)	1.6558 (1.5654)	1.8760 (0.0346)	1.8760 (0.0346)	1.8760 (0.0346)	1.9288 (0.0080)	1.9288 (0.0080)	1.9288 (0.0080)
$\alpha = 1.5$	$\hat{\alpha}$	2.8371 (11.9426)	8.0732 (2412.893)	7.4235 (7598.679)	1.9368 (0.4251)	5.2794 (174.0955)	2.4442 (328.039)	1.7427 (0.0940)	5.5802 (91.5425)	1.7020 (0.0495)
$k = 0.9$	\hat{k}	0.4307 (0.3696)	0.1139 (0.7551)	0.3773 (3.3123)	0.6920 (0.0632)	0.4248 (0.2291)	0.7553 (0.0597)	0.7881 (0.0186)	0.4814 (0.1754)	0.8195 (0.0097)
$\xi = 2$	$\hat{\xi}$	-7.2525 (11697.52)	-7.2525 (11697.52)	-7.2525 (11697.52)	-7.5510 (5945.311)	-7.5510 (5945.311)	-7.5510 (5945.311)	-11.7905 (7703.839)	-11.7905 (7703.839)	-11.7905 (7703.839)
$\alpha = 1.5$	$\hat{\alpha}$	23.6454 (53728.84)	4981.715 ($> 10^{11}$)	8980.741 ($> 3 \cdot 10^{11}$)	22.4502 (23885.16)	55264.16 ($> 6 \cdot 10^{10}$)	109196.9 ($> 2 \cdot 10^{12}$)	30.6638 (30925.23)	474804.6 ($> 7 \cdot 10^{13}$)	947059.1 ($> 2 \cdot 10^{14}$)
$k = 2$	\hat{k}	0.7048 (1.7743)	-1.1361 (44.1992)	2.1368 (60.9196)	0.9395 (1.1285)	0.4783 (2.3167)	4.0160 (168.0819)	0.9891 (1.0220)	0.4983 (2.2551)	1.0641 (1.7845)

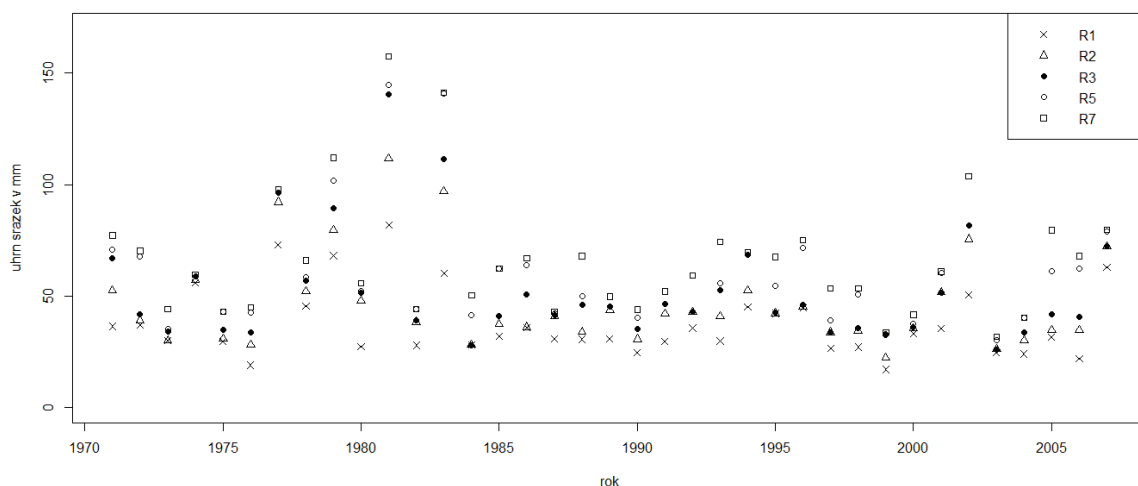
6 Pravděpodobnost extrémních srážkových událostí

L-momenty se používají například v oborech jako inženýrství, ekonomie, hydrologie a meteorologie. Závěrečná část práce se proto věnuje aplikaci získaných poznatků z předchozích kapitol na reálná klimatologická data. Pomocí teorie L-momentů určíme pravděpodobnost extrémních srážkových událostí v Liberci.

K dispozici máme kompletní data maximálního ročního úhrnu srážek za 1, 2, 3, 5 a 7 dnů naměřená Leteckou meteorologickou stanicí ČHMÚ Liberec mezi lety 1971 až 2007. Data jsou uspořádána do Tabulky 8, kde označení R1, R2, R3, R5 a R7 po řadě znamenají maximální roční úhrn srážek za 1, 2, 3, 5 a 7 dnů. Naměřené hodnoty jsou graficky znázorněny na Obrázku 7.

Tabulka 8: Maximální roční úhrn srážek v mm za 1, 2, 3, 5 a 7 dnů v Liberci v letech 1971–2007

R1	36.4	36.9	30.1	56.0	29.5	19.0	72.9	45.4	68.1	27.2
	82.0	27.9	60.1	28.0	32.0	35.7	30.7	30.6	30.9	24.5
	29.6	35.6	29.8	45.1	42.2	44.7	26.4	27.1	17.0	33.1
	35.4	50.4	24.5	24.0	31.4	22.0	62.8			
R2	52.4	39.2	30.1	57.4	30.7	28.0	92.1	52.2	79.6	47.9
	111.7	38.4	97.0	28.0	37.3	36.0	41.0	34.0	43.5	30.6
	42.0	42.8	40.9	52.6	42.3	45.1	33.7	34.2	22.3	35.5
	51.6	75.5	26.1	30.1	34.6	34.6	72.2			
R3	66.9	41.8	34.0	58.8	34.9	33.6	96.3	56.8	89.5	51.5
	140.5	39.0	111.3	28.0	41.0	50.9	41.5	46.1	45.3	35.4
	46.3	42.9	52.5	68.4	42.5	46.2	33.8	35.6	32.7	35.9
	51.6	81.7	26.1	33.5	41.8	40.8	72.2			
R5	70.8	67.9	35.3	59.0	42.8	42.6	96.4	58.6	101.8	52.4
	144.7	44.1	140.7	41.5	62.4	63.9	42.3	49.8	45.4	40.1
	46.4	42.9	55.6	68.4	54.6	71.5	39.1	50.9	32.8	37.5
	60.5	81.7	30.2	40.2	61.2	62.2	78.8			
R7	77.2	70.2	44.2	59.5	43.0	45.0	97.8	66.0	112.0	55.8
	157.5	44.1	141.2	50.3	62.4	66.9	43.0	67.9	49.7	43.9
	52.0	59.3	74.4	69.7	67.6	75.0	53.3	53.5	33.7	41.6
	60.9	103.7	31.8	40.2	79.6	68.0	79.8			



Obrázek 7: Maximální roční úhrn srážek v mm za 1, 2, 3, 5 a 7 dnů v Liberci v letech 1971–2007

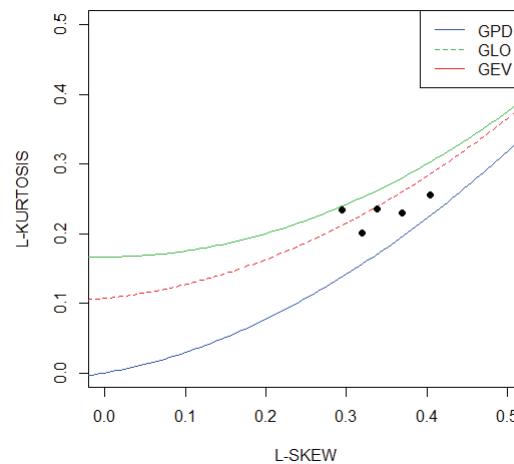
Jak uvádí Kyselý a Pícek [6], nejvhodnějším pravděpodobnostním rozdělením pro modelování maximálního ročního úhrnu srážek jak v České republice, tak v ostatních částech světa je zobecněné rozdělení extrémních hodnot (GEV). Výjimku však tvoří severovýchodní část republiky, pro kterou se upřednostňuje zobecněné logistické rozdělení (GLO). Jelikož jsme se zobecněným rozdělením extrémních hodnot v práci nezabývali, použijeme k modelování úhrnu srážek v Liberci tříparametrické zobecněné Paretovo rozdělení, pro které jsme odvodili teoretické L-momenty v kapitole 3.6. Z L-momentového poměrového diagramu (Obrázek 8) je vidět, že výběrové L-momentové poměry odpovídající datům R1–R7 jsou blízko křivky zobecněného Paretova rozdělení. Proto lze i zobecněné Paretovo rozdělení pro modelování maximálního úhrnu srážek v Liberci považovat za přijatelné⁶.

Pro jednotlivé maximální roční jednodenní až sedmidenní úhrny srážek byly spočítány parametry L-momentovou metodou a určeny některé kvantily. Výběrové L-momenty a L-momentové poměry získáme dosazením naměřených hodnot z Tabulky 8 do výrazů (2.15), (2.16), (2.17) a (2.19). Odhady parametrů zobecněného Paretova rozdělení dostaneme použitím odvozených vztahů z kapitoly 4.2.6

$$\hat{\xi} = l_1 - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k} + 1}, \quad \hat{\alpha} = l_2(\hat{k} + 1)(\hat{k} + 2), \quad \hat{k} = \frac{1 - 3\tau_3}{1 + \tau_3}.$$

⁶Detaily o L-momentovém poměrovém diagramu a jeho aplikaci na výběr vhodného pravděpodobnostního rozdělení pro modelování dat jsou popsány v literatuře [4], [5].

Kvantilové odhady obdržíme dosazením odhadnutých parametrů do kvantilové funkce (3.48). Veškeré výpočty byly provedeny v programu R a výsledky shrnuty do Tabulky 9.



Obrázek 8: L-momentový poměrový diagram pro maximální roční 1denní až 7denní úhrn srážek

Tabulka 9: Odhady parametrů a některé kvantily pro zobecněné Pareto rozdělení odpovídající datům z Tabulky 8

Data	Parametry			Kvantily				
	ξ	α	k	0.01	0.10	0.50	0.90	0.99
R1	20.9331	17.0052	-0.0307	21.10	22.73	32.85	61.51	105.05
R2	26.1045	18.8488	0.0791	26.29	28.08	38.82	65.78	98.85
R3	29.6747	19.0517	0.1503	29.87	31.67	42.22	66.76	92.99
R5	33.8777	25.7268	0.0121	34.14	36.59	51.64	92.30	149.11
R7	36.6340	31.9953	-0.0898	36.96	40.02	59.52	118.48	219.12

Na základě kvantilů z Tabulky 9 je možné určit N -leté návratové hodnoty. Například 99% kvantil z Tabulky 9 odpovídá 100letému úhrnu srážek. Stoletý úhrn srážek pak představuje množství, kterého je v dlouhodobém průměru dosaženo jednou za 100 let.

Závěr

V práci bylo ukázáno, že teorie L-momentů poskytuje alternativní způsob, jak lze charakterizovat spojité pravděpodobnostní rozdělení a odhadnout jejich parametry. U vybraných spojitých rozdělení (jmenovitě rovnoměrné, exponenciální, normální, Pareto, logistické a zobecněné Pareto rozdělení) byly L-momentovou metodou určeny odhady parametrů, čemuž předcházelo, v některých případech pracné, odvození teoretických L-momentů.

Dále byla ve statistickém programu R provedena malá simulační studie odhadu parametrů normálního, logistického a zobecněného Pareto rozdělení. K odhadu parametrů byly použity tři typy metod: metoda maximální věrohodnosti, L-momentová a momentová metoda. Výsledky byly porovnány a ukázalo se, že v určitých případech, závislých na rozsahu výběru a u zobecněného Pareto rozdělení i na hodnotě parametru tvaru, je L-momentová metoda vhodnou alternativou k běžně používaným metodám. V případě zobecněného Pareto rozdělení je L-momentová metoda jediná ze všech tří použitých metod, jak v programu R co nejsnadněji získat odhad parametru polohy. Významný je i případ, kdy rozsah výběru je malý a parametr tvaru je blízký jedné, jelikož L-momentová metoda dává narozdíl od ostatních rozumné výsledky.

V závěru práce jsme se věnovali aplikaci L-momentů v praxi a využili jsme teorii L-momentů k určení pravděpodobnosti extrémních srážkových událostí v Liberci. K tomu jsme použili zobecněné Pareto rozdělení, které je rovněž vhodné k modelování maximálního úhrnu srážek v Liberci.

Reference

- [1] ANDĚL, J. *Základy matematické statistiky*. Praha: Matfyzpress, 2005. 356 s. ISBN 80-86732-40-1.
- [2] ASQUITH, W. H. *Univariate Distributional Analysis with L-moment Statistics using R*. Texas, 2011. Dissertation. Texas Tech University.
- [3] ELAMIR, E. A. H. - SEHEULT, A. H. Trimmed L-moments. *Computational Statistics & Data Analysis*, 2003, 43 (3), s. 299–314.
- [4] HOSKING, J. R. M. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of order statistics. *Journal of the Royal Statistical Society*, 1990, Series B 52, s. 105–124.
- [5] HOSKING, J. R. M. - WALLIS, J. R. *Regional frequency analysis: an approach based on L-moments*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 242 s. ISBN 0-521-43045-3.
- [6] KYSELÝ, J. - PICEK, J. Regional growth curves and improved design value estimates of extreme precipitation events in Czech Republic. *Climate Research*, 2007, 33, s. 243–255.
- [7] R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL <http://www.R-project.org/>.
- [8] RIZZO, M. L. *Statistical Computing with R*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2008. 399 s. ISBN 1-58488-545-9.
- [9] ZVÁRA, K. - ŠTĚPÁN, J. *Pravděpodobnost a matematická statistika*. 4. vyd. Praha: Matfyzpress, 2006. 230 s. ISBN 80-86732-71-7.